GÖTEBORGS UNIVERSITET

Kartläggning av matematikundervisning om tal i förskoleklass

Camilla Björklund, Jessica Elofsson, Anna-Lena Ekdahl, Angelika Kullberg, Maria Alkhede & Ulla Runesson Kempe

Förord

Vi vill rikta ett stort tack till de lärare i förskoleklass som i en lugnare period under Corona-pandemin öppnade upp sina klassrum för oss nyfikna forskare. Tack för att ni valde att dela med er av er matematikundervisning och era erfarenheter av att arbeta med matematik tillsammans med sex-åringar.

I denna rapport presenteras resultatet från den kartläggning av matematikundervisning i förskoleklass som vi genomförde under höstterminen 2021 i projektet SATSA. Det övergripande syftet med kartläggningen var att studera hur svensk matematikundervisning i förskoleklass genomförs, vilka material som används och hur elever ges möjlighet att lära om tal, tals egenskaper och hur tal används i problemlösning. I rapporten beskrivs våra utgångspunkter för kartläggningen, tidigare forskning om matematikundervisning i Sverige som ligger till grund för SATSA-projektet, samt hur vi har gått tillväga när vi genomfört kartläggningen. Vidare presenteras de resultat och slutsatser som vårt kartläggningsarbete resulterat i. Kartläggningen kommer att ligga till grund för vidare planering och genomförande av forskning om matematikundervisning i förskoleklass i interventionsstudier där lärare och forskare tillsammans prövar och utvecklar principer och praktiker för undervisning om tal.

Forskningsprojektet SATSA understöds av Vetenskapsrådet (Diarienummer: 2020-03712) under perioden 2021–2024. I projektgruppen ingår professor Camilla Björklund (projektledare) vid Göteborgs universitet, post-doktor Jessica Elofsson vid Göteborgs universitet, universitetslektor Anna-Lena Ekdahl vid Jönköping University, professor Angelika Kullberg vid Göteborgs universitet, doktorand Maria Alkhede vid Göteborgs universitet samt senior professor Ulla Runesson Kempe vid Jönköping University.

Vår förhoppning är att denna rapport ska nå förskoleklasslärare, skolledare och andra med intresse för undervisning och utveckling av skolverksamhet och bidra till reflektion kring matematik-undervisning i förskoleklass samt inspirera till utveckling av densamma.

Göteborg, maj 2022

Camilla Björklund, Jessica Elofsson, Anna-Lena Ekdahl, Angelika Kullberg,

Maria Alkhede & Ulla Runesson Kempe

Sammanfattning av kartläggningen

Sedan 2016 behandlas förskoleklassen i ett eget kapitel i läroplanen (Lgr11). Genom att göra förskoleklassen obligatorisk för alla sexåringar och genom att i Lgr11 skriva fram dess uppdrag framträder en tydlig strävan i att skapa en nationellt likvärdig undervisning med hög kvalitet som alla sexåringar ska ta del av. Förskoleklassens syfte och de kunskapsområden (centralt innehåll) som ska fokuseras i verksamheten skrivs fram i Lgr11. Samtidigt ges läraren stor frihet att utforma själva undervisningen. Detta öppnar upp för goda möjligheter att ta vara på elevers individuella erfarenheter och behov, men samtidigt skapas utrymme både för olika val och tolkningar, vilket gör att matematikundervisningen kan komma att skilja sig mycket åt i olika förskoleklasser. Olikheterna kan handla både om det matematiska innehållet som behandlas och om undervisningens utformning.

Vi ser ett behov av att mer uppmärksamhet riktas mot vad eleverna faktiskt ges möjlighet att lära och utveckla kunnande om i den matematikundervisning som de får ta del av i förskoleklassen. Det saknas en bild av hur undervisningen bidrar (eller inte lyckas bidra) till lärande och kunskapsutveckling hos eleverna. Ett tydligare fokus på undervisningen skulle komplettera den bild som en diagnos kan ge av barns kunnande vid ett visst tillfälle, med en bedömning av i vilken utsträckning undervisningen gör det möjligt för eleverna att utveckla sitt sätt att förstå matematiken. Detta är ett av de övergripande målen i projektet SATSA: att bidra med en bild av vad elever ges möjlighet att lära ifråga om tal, tals egenskaper och tals användning i problemlösning i den matematikundervisning som genomförs i svenska förskoleklasser.

SATSA är en förkortning för "Strukturell ansats i undervisning som grund för hållbart aritmetiklärande" och är ett forskningsprojekt där matematikundervisningen i förskoleklassen står i fokus. Syftet med forskningsprojektet är att studera hur undervisning kan genomföras för att 6-åringar ska utveckla förståelse för tal, tals egenskaper och hur tal kan användas i problemlösning. För att uppnå detta syfte har vi i ett första steg genomfört en kartläggning av material, metoder och undervisningsstrategier som används i matematikundervisning i svensk förskoleklass. Utgångspunkten är tidigare forskning som visat att val av material och i synnerhet på vilket sätt ett matematiskt innehåll synliggörs av läraren i undervisningen spelar en viktig roll för elevers möjligheter att utveckla hållbara och utvecklingsbara matematikkunskaper och färdigheter. I denna rapport presenteras resultatet från denna första del i SATSA-projektet.

I kartläggningen av matematikundervisning i förskoleklass har forskarna i projektgruppen besökt 56 skolor och totalt 95 klasser och genomfört en observation per klass. De förskoleklasser vi har besökt finns i både större och mindre kommuner i södra Sverige. Skolorna är belägna i städer av skiftande storlek och på mindre orter på landsbygden. Skolornas storlek och elevsammansättning varierar. Undervisningsgrupperna har varierat i storlek och antalet elever har varit mellan 4 och 28 vid våra observationer.

I vårt arbete med att kartlägga matematikundervisning i förskoleklass har vi använt ett verktyg "MPM-framework" (MPM står för "Mediating Primary Mathematics" som är utvecklat av Hamsa Venkat och Mike Askew[4]). Med hjälp av verktyget studeras undervisningen om tal, särskilt talrelationer, tals egenskaper och hur matematiska samband i uppgifter och exempel synliggörs i undervisningen. Vad eleverna de facto lär sig kan kartläggningen inte ge svar på. Däremot kan den ge en bild av de förutsättningar för lärande som getts i undervisningen.

Rapporten presenterar en sammanställning av innehåll som behandlas i matematikundervisningen. Tals innebörd och struktur, representationer av tal, talrelationer, samt aritmetiska operationer är fyra teman som framträder i observationerna. Inom dessa behandlas särskilt kardinalitet, men också ordinalitet samt talrelationer inom och mellan tal som grundläggande egenskaper hos tal, vilket vidare

kan bearbetas i användning i problemlösning. Den sammantagna bilden visar att undervisningen vanligtvis behandlar relevanta innehåll som har potential att bidra till en god taluppfattning hos eleverna, även om observationerna också visar att matematikundervisningen i många fall främst bekräftar vad eleverna redan kan och riskerar att begränsa matematiklärandet till färdighetsträning. Utmaningen i att genomföra undervisning som *utvecklar* elevers taluppfattning är att synliggöra nödvändiga samband mellan till exempel representationer (i räkneord och siffersymboler) och tals innebörd och struktur, bland annat i uppdelning av tal och i talraden. Detta får konsekvenser för hur undervisningen synliggör tals användning i för eleverna relevant och meningsfull problemlösning.

Med stöd av MPM-verktyget, visar kartläggningen tydligt på flera utvecklingsområden. Det handlar främst om hur undervisningen ska utformas så att det begreppsliga kunnandet hos eleverna utvecklas och fördjupas. Flera förutsättningar finns för detta. Bland annat genom de väl valda artefakter som är utformade för att synliggöra tal och talstrukturer (såsom tioramar, talblock och pärlband) som finns tillgängliga och används frekvent i undervisningen. Vi ser också att lärare i många fall använder material av olika slag på strukturerat sätt, som gör att talrelationer kan bli synliggjorda för eleverna. Vi har också observerat att undervisningen ofta har en inramning som karakteriseras av lekfullhet och en ambition att ta vara på elevernas egna erfarenheter, vilket kan göra det matematiska innehållet meningsfullt och relevant för eleverna. Dock ser vi att det finns en risk att undervisningen reduceras till att fokusera inramningen och ett "görande", där matematikinnehållet blir ett parallellspår. Ett annat utvecklingsområde vi observerat är lösningsmetoder, i vilken utsträckning och på vilket sätt lärare erbjuder metoder för problemlösning där lösningsmetoderna står i centrum för undersökning, jämförelse och värdering. Det vill säga att metoder för problemlösning inte enbart blir ett sätt att få svar på en uppgift, utan att de i sig kan uppmärksammas och därmed göras till ett specifikt innehåll i undervisningen. På så sätt kan reflektioner kring problemlösningsmetoder fördjupa förståelsen för exempelvis när de är användbara, deras begränsningar men också för att påvisa samband och relationer. Detta ser vi som en förutsättning för undervisning som bidrar till hållbara och utvecklingsbara matematikkunskaper och färdigheter.

Observationerna visar att den kommunikativa traditionen i utbildning för yngre barn tycks öppna upp för goda möjligheter att ta vara på elevinspel i undervisningen och på så sätt involvera eleverna i samtal om matematiska innehåll som är meningsfulla och utvecklande för dem. Det framträder också en bild av undervisningen där elevers svar, inspel och förslag till lösningar ofta bekräftas. Det undervisningen däremot mer sällan bidrar till är att utveckla elevernas svar och inspel. Här finns en stor utvecklingspotential. Potential därför att den svenska skolan, inklusive förskoleklassen, är starkt inkluderande och kommunikativ, där eleverna ska göras delaktiga i sitt lärande, ofta genom att aktivt undersöka och föreslå lösningar på gemensamma problem. I observationerna framträder dock en tendens att undervisningen stannar vid att bekräfta elevernas svar, varvid det tycks gott nog att de är delaktiga och presenterar ett svar. I de goda exempel vi observerat tar läraren vara på elevernas svar som exempel att lyfta fram i ett systematiskt undersökande och jämförande, för att på så sätt utveckla elevsvaren med fler exempel, kontrasterande exempel, förklaringar och generaliseringar.

Kartläggningen innebär att vi kan fånga upp goda exempel och även identifiera var utmaningarna ligger i undervisningen om tal, tals egenskaper och tals användning i problemlösning. Det finns potential i förskoleklassens matematikundervisning att gynna varje elevs lärande, men också en stor utmaning i att synliggöra det innehåll som är grundläggande för en hållbar och utvecklingsbar taluppfattning hos eleverna. Vi menar att insikterna om detta är en viktig startpunkt för att kunna sprida och vidareutveckla det som redan görs framgångsrikt i undervisningspraktiken och för att få syn på utvecklingsområden i skolverksamheten.

Mot bakgrund av den systematiska kartläggning som gjorts ger vi följande rekommendationer för vidare utveckling av matematikundervisningen om tal i förskoleklass:

- Bekräfta elevers förslag och svar, men problematisera förslagen genom frågor som “hur kan man veta det?” så att processen och valet av metod görs till en central del av matematiken.
- Låt innehållet som interaktionen i lärandesituationen kretsar kring drivas av matematiska undersökningar och fördjupande resonemang där matematiken görs relevant och meningsfull för eleverna även om lek och nyfikenhet ska prägla aktiviteterna.
- Välj artefakter och notationer med omsorg, så att de tillsammans med lärarens ord och förtydligande gester visar på relationer inom och mellan tal.
- Låt exempel finnas kvar synliga för eleverna, så att exemplen kan jämföras och möjliga samband upptäckas och förklaras.
- Stanna upp och undersök på vilket sätt man kan lösa en uppgift, om det finns flera sätt och vilket sätt som i så fall är mest lämpligt för att lösa den uppgiften och andra uppgifter.
- Ta tillvara på elevers felsvar och se dem som underlag för att undersöka på vilket sätt en uppgift kan tolkas och förstås ur olika perspektiv. Detta främjar en undersökande atmosfär och att det är tillåtet att svara fel och att komma med kreativa lösningar på problem.

Innehållsförteckning

INLEDNING **1**

FORSKNING OM SVENSK MATEMATIKUNDERVISNING MED YNGRE BARN OCH ELEVER **2**

FOKUS PÅ UNDERVISNINGEN OCH HUR INNEHÅLLET BEHANDLAS **4**

INNEHÅLLSFOKUS 4
ELEVERS TALUPPFATTNING SOM STARTPUNKT OCH MÅL 4

VERKTYG FÖR ATT KARTLÄGGA MATEMATIKUNDERVISNING I FÖRSKOLEKLASS **5**

MPM-VERKTYGET I SVENSK KONTEXT 6

METODER FÖR KARTLÄGGNINGEN I SATSA **7**

VAR HAR VI GJORT SKOLBESÖK? 7
VILKA ÄR FÖRSKOLEKLASSLÄRARNA? 7
VAD HAR VI DOKUMENTERAT? 8

ÖVERSIKT – VAD HAR VI SETT I FÖRSKOLEKLASSERNAS MATEMATIKUNDERVISNING? **8**

UTFALLET AV OBSERVATIONERNA 8
Artefakter *8*
Notationer *9*
Metoder *10*
Matematiska samband *10*
Elevinspel *11*
VAD BETYDER UTFALLET AV KARTLÄGGNINGEN FÖR ELEVERS LÄRANDE? 11

OLIKA MÖJLIGHETER TILL LÄRANDE **13**

INNEHÅLL SOM BEHANDLAS I UNDERVISNINGEN 13
TALS INNEBÖRD OCH STRUKTUR 14
Tals innebörd *14*
Tals struktur *15*
REPRESENTATIONER AV TAL 17
Räkneord - Siffra - Antal *17*
Att forma och skriva siffror *18*
TALRELATIONER 18
Relationer inom tal *19*
Relationer mellan tal *20*
ARITMETISKA OPERATIONER 22
SAMMANFATTNING 24
HUR INNEHÅLLET BEHANDLAS 25
VILKA MATERIAL ANVÄNDS OCH HUR? 25
Olika typer av inramning *25*
Strukturerade och ostrukturerade artefakter *29*
Att använda artefakter på strukturerat eller ostrukturerat sätt *29*
NOTATIONER 31
Notationer i syfte att visa på samband *32*
Notationer i syfte att presentera uppgift eller svar *34*
METODER FÖR ATT LÖSA UPPGIFTER 35
ATT VISA PÅ MATEMATISKA SAMBAND 38
HUR TAS ELEVSVAR TILLVARA? 41
Bekräftelse på vad eleven kan *41*
Bekräftar och utvecklar svar *42*
Erbjuder icke-exempel *43*
Vad gör läraren med elevers felsvar? *44*
SAMMANFATTNING 46
HUR UNDERVISNINGEN ISCENSÄTTS 46

MATEMATIKINNEHÅLLETS RELEVANS OCH MENINGSFULLHET 47
Lekfull inramning *47*
Matematiken reducerar bruset *50*
UNDERVISNINGENS ORGANISATION 52
Den röda tråden - från uppstart, via elevarbete till summering *53*

DISKUSSION OCH REKOMMENDATIONER 54

REKOMMENDATIONER 56

REFERENSER 57

Inledning

När förskoleklassen infördes som egen skolform under slutet av 1990-talet fanns många idéer, intentioner och visioner bakom tillkomsten vilka har beskrivits i en rad olika dokument, rapporter och propositioner. De delar alla en central tanke; förskoleklassen ska vara en bro mellan två kulturer; förskola och grundskola. Detta ger förskoleklassen en särställning i det svenska utbildningssystemet där de två kulturerna möts och skapar något unikt. I förskoleklass har läraren möjlighet att erbjuda elever undervisning som innehåller varierade arbetssätt, uttrycksformer och lärmiljöer för att stimulera elevens utveckling och lärande i övergången från förskola till skola. Ambitionen är att detta görs genom att elevernas tidigare erfarenheter och kunnande tas tillvara samtidigt som förutsättningar skapas för att de ska utvecklas i riktning mot de kunskapskrav som senare kommer att ställas i grundskolan. Sedan 2018 är förskoleklassen obligatorisk från och med hösten det år då barnet fyller 6 år, vilket ytterligare har bidragit till att förstärka förskoleklassens roll som bro mellan förskola och grundskola. Förskoleklassen är första steget i en tio år lång utbildning som är obligatorisk för alla barn i Sverige.

Det finns en stor mängd forskning som visar att tidiga insatser i matematik är av betydelse för att ge barn och elever grundläggande kunskaper i matematik. Vi vet också att barns matematikkunskaper vid skolstart har stor betydelse för deras fortsatta lärande och därmed deras framtid. När läraren möter sina elever första dagen i förskoleklassen har eleverna med sig uppfattningar och erfarenheter av matematik som de mött och använt i olika situationer. De kan ha med sig erfarenheter av att bestämma antalet föremål i mängder, att använda räkneramsan för att räkna framåt och bakåt samt att hantera enklare additioner och subtraktioner i vardagsnära situationer. En del elever har med sig många och rika erfarenheter av matematik medan andra har mer begränsade erfarenheter vid starten i förskoleklass. Variationen av kunskaper och erfarenheter kan utgöra en utmaning för läraren, men också en styrka i och med att olika sätt att förstå ett och samma innehåll berikar, både för den som redan "kan" mycket och för den som behöver få möta nya erfarenheter av tal och hur tal kan användas.

Sedan 2016 behandlas förskoleklassen i ett eget kapitel i läroplanen, Lgr11[1]. Genom att göra förskoleklassen obligatorisk för alla sexåringar och genom att i Lgr11 skriva fram dess uppdrag framträder en tydlig strävan att skapa en nationellt likvärdig undervisning med hög kvalitet som alla sexåringar ska ta del av. Det framgår tydligt att förskoleklassen är en målstyrd verksamhet som ska planeras, genomföras och utvärderas i relation till läroplansmålen. Kunskapsområden (centralt innehåll) som ska fokuseras i utbildningen skrivs fram i Lgr11, samtidigt som läraren ges stor frihet att utforma själva undervisningen i klassrummet. Detta öppnar upp för goda möjligheter att ta vara på elevers individuella erfarenheter och behov, men samtidigt skapas utrymme både för valmöjligheter och tolkningar, vilket gör att matematikundervisningen kan komma att skilja sig mycket åt i olika förskoleklasser. Olikheterna kan handla både om det matematiska innehållet som behandlas och om undervisningens utformning.

Sedan 2019 finns ett obligatoriskt kartläggningsmaterial "Hitta matematiken"[2] som är en del i *Läsa, skriva, räkna – en garanti för tidiga stödinsatser*[3]. Syftet med kartläggningsmaterialet är att ge stöd för att identifiera var eleverna befinner sig kunskapsmässigt när det gäller förtrogenhet med bland annat tal och räkning så att lämplig undervisning kan planeras och genomföras i förskoleklass. De allra flesta kartläggningsmaterial och bedömningsstöd tar fasta på elevens kunnande i förhållande till vad målet för ett mer utvecklat kunnande är och resultatet av bedömningen är skillnaden mellan det hittills uppnådda kunnandet och det eftersträvade. Vi ser ett behov av att mer uppmärksamhet riktas mot vad eleverna faktiskt ges möjlighet att lära och utveckla kunnande om i den matematikundervisning som de får ta del av i förskoleklassen. Det vill säga, det saknas en bild av hur undervisningen

bidrar (eller inte lyckas bidra) till lärande och kunskapsutveckling hos eleverna. Skiftningen i fokus skulle komplettera den ögonblicksbild som en kartläggning eller diagnos kan ge av barns kunnande vid ett visst tillfälle, med en bild och bedömning av själva undervisningen och i vilken utsträckning undervisningen tar avstamp i elevernas kunnande och gör det möjligt för eleverna att utveckla sitt sätt att förstå matematiken. Att bidra med en bild av vad elever ges möjlighet att lära ifråga om tal, tals egenskaper och tals användning i problemlösning i den matematikundervisning som genomförs i svenska förskoleklasser är ett av SATSA-projektets övergripande mål.

SATSA är en förkortning för "Strukturell ansats i undervisning som grund för hållbart aritmetiklärande" och är ett forskningsprojekt där matematikundervisningen i förskoleklassen står i fokus. Syftet med forskningsprojektet är att studera hur undervisning kan genomföras för att 6-åringar ska utveckla förståelse för tal, tals egenskaper och hur tal kan användas i problemlösning. För att uppnå detta syfte har vi i ett första steg genomfört en kartläggning av material, metoder och undervisningsstrategier som används i matematikundervisning i svensk förskoleklass. Utgångspunkten är tidigare forskning som visat att val av material och i synnerhet på vilket sätt ett matematiskt innehåll synliggörs av läraren i undervisningen spelar en viktig roll för elevers möjligheter att utveckla hållbara och utvecklingsbara matematikkunskaper och räknefärdigheter. I denna rapport presenteras resultatet från denna första del i SATSA-projektet.

Forskning om svensk matematikundervisning med yngre barn och elever

Det finns mycket forskning om undervisning i tidiga skolår, men kunskaper och resultat från internationella studier är inte alltid lätta att föra över till den egna kontexten, inte minst för att skolsystemen ser olika ut i olika länder vilket gör att förväntningarna på elevers kunnande många gånger också är väldigt olika. I Sverige har det gjorts en del studier om yngre barn och elevers matematiklärande och om undervisningen i förskola, förskoleklass och grundskolans tidigare år. Begränsar vi oss till undervisning och lärande om tal, antal och räknande kan Dagmar Neumans studie av 7-åringar nämnas som en betydelsefull källa. Neuman[4] undersökte hur eleverna uppfattar och använder tal. Hon ville fördjupa vår kunskap om varför en del elever har svårigheter att utveckla räknefärdigheter. Hennes slutsats var att för att hantera aritmetiska uppgifter behöver eleverna lära sig erfara tal som sammansatta och som del-helhets-relationer, det vill säga att "se" tal som en struktur bestående av delar och helhet såsom att 3 och 2 är delar av 5 samt att 3 är större än 2 och 5 kan ingå i en ännu större helhet. Neumans insikter ledde till ett pedagogiskt material "Landet Längesen", som tog utgångspunkt i att elever bör få upptäcka talens egenskaper genom att jämföra och skapa enheter där fingertal är en brygga till att se och använda talstrukturer i problemlösning. Fingertal är representationer för tal där till exempel talet 8 visas som en hel hand och tre fingrar till på andra handen, vilket ger en synlig struktur av att 5 och 3 tillsammans är 8. De mönster som fingertalen visar känns snabbt igen av barn och syftet är att de inte ska behöva räkna fram ett-och-ett finger åt gången för att representera ett tal. Neumans studier och pedagogiska idé innebär att elevernas sätt att uppfatta tal ställs i förgrunden och undervisningen syftar till att utveckla elevernas sätt att "se" eller uppfatta tal som grund för aritmetisk problemlösning.

Neuman visade att vissa elever börjar skolan med en taluppfattning som inte alltid är hållbar när eleverna möter större talområden och mer avancerad aritmetik. I ett projekt med namnet FASETT (Förmågan att sinnligt erfara de tio första talen som nödvändig grund för aritmetiska färdigheter) tog vi fasta på Neumans insikter och prövade i vilken utsträckning det är möjligt att, redan hos förskolebarn, befästa en taluppfattning som är utvecklingsbar och hållbar över längre tid. I nära

samarbete mellan forskare och förskollärare prövades och utvecklades en pedagogik i förskola med 5-åringar som bidrog till utveckling av barnens grundläggande räknefärdigheter. Ett viktigt verktyg i undervisningen var fingertal som stöttade barnen i att uppfatta hur tal är sammansatta och relaterar till andra tal. Att kunna se på vilket sätt tal kan struktureras och om-struktureras, med stöd av fingrarna, visade sig vara en kritisk förmåga för taluppfattningens utveckling. De barn som deltog i FASETT-projektet utvecklade framgångsrikt sin förståelse för tal och räknande. En förståelse som bygger på att uppfatta talstrukturer och hantera tals del-helhets-relationer. Det vill säga, de löste till exempel problem som "Du har tre glas på bordet, åtta ska äta, hur många glas fattas?" genom att utgå från helheten 8 där 3 är en del av denna helhet och antalet glas som saknas är skillnaden mellan 3 och 8. Med fingertal som stöd, strukturerade barnen först upp helheten 8 med en hel hand och tre fingrar på andra handen, tog ner tre fingrar för de glas som redan fanns på bordet och *såg* direkt utan att räkna fingrarna, hur många fingrar (5) som var kvar vilket motsvarade antalet glas som saknades. Denna förståelse och färdighet visade sig bestå över tid på så sätt att många av barnen ännu efter ett år i förskoleklass (där de tagit del av många olika sätt att undervisa matematik) hade förmåga att ta sig an nya uppgifter på ett strukturerat sätt. Projektet visar därmed hur en noggrann design av aktiviteter och särskilt hur lärares metoder för att synliggöra nödvändiga aspekter av tal[5] avspeglar sig i vad barn lär sig i undervisningen. Många interventioner som genomförs i tidiga skolår och förskola visar på positiva effekter, men FASETT utmärker sig i och med att effekterna består ännu ett år efter interventionen[6]. Därmed bekräftades antagandet som gjordes inför projektet; att tillämpa en strukturerande ansats för att utveckla elevers räknefärdigheter bidrar till att stärka förmågan också på lång sikt.

I utvecklings- och forskningsprojekt som FASETT visar det sig vanligtvis att barn med lämpligt stöd (undervisning) kan utveckla sina matematikförmågor och färdigheter så att de är väl rustade att fortsätta lära sig matematik i såväl vardags- som utbildningssammanhang. Men det dyker också upp nya frågor vartefter vi lär oss mer om barns matematiska tänkande och undervisningens innehåll och utformning. Till exempel visade det sig att trots att barnen i FASETT-projektet lärde sig "se" tal som sammansatta och hanterade problemlösning på ett framgångsrikt sätt när de mötte aritmetiska uppgifter av olika slag, så var en utmaning att generalisera kunskaperna så att de också kunde tillämpa sin förståelse för talrelationer när talen rörde sig över tio. Detta blev utgångspunkten för ett nytt projekt, "Se eller Räkna" där samarbete mellan forskare och lärare i årskurs 1 utmynnade i undervisningsdesigner som utgick från att en strukturerande ansats är framgångsrik och talrelationer en nödvändighet för att elever ska lära sig "se" tal och kunna använda dessa i problemlösning. Men därtill lades också fokus på tiotalsövergången samt att se tio som en viktig hållpunkt och som en enhet. Även i detta projekt utvecklades elevernas kunnande och de lärde sig lösa aritmetikuppgifter på ett framgångsrikt sätt, med tal såväl under som över tio.

När vi ser på resultaten från FASETT och "Se eller Räkna" och den potential som finns i den tidiga undervisningen om tal, väcks förstås frågan om vilka möjligheter som erbjuds eleverna i förskoleklass att lära sig "se" talrelationer? Inte för att eleverna i förskoleklass behöver lära sig det som matematiken i årskurs 1 och högre årskurser ställer som mål, utan för att eleverna ska grundlägga en god taluppfattning och därmed få de bästa möjligheter att fortsätta utveckla sina räknefärdigheter. Det är här som SATSA-projektet kommer in i bilden. Projektet har fokus på att studera hur undervisning kan genomföras för att 6-åringar ska utveckla förståelse för tal, tals egenskaper och hur tal kan användas i problemlösning som en grund för fortsatt lärande och kunskapsutveckling.

Fokus på undervisningen och hur innehållet behandlas

Det centrala innehållet som skrivs fram för förskoleklassen i Lgr11 gällande matematik, innebär att eleverna ska ges möjlighet att utveckla förtrogenhet med naturliga tal och deras egenskaper och hur dessa kan användas. I skollagen och i Lgr11 står dessutom att utbildningen ska vila på vetenskaplig grund. Det betyder bland annat att den som planerar undervisningen behöver ha kunskaper om vad forskning visat är viktiga baskunskaper, hur kunskaperna utvecklas samt på vilket sätt barn i den specifika åldersgruppen som man undervisar lär sig. Vad det innebär att ha kunskaper om tal, tals egenskaper och hur tal kan användas i problemlösning är därför centralt för att kunna planera och genomföra undervisning som stöttar elevers lärande.

Innehållsfokus

Undervisning kan inte studeras, förstås och utvecklas utan ett innehåll. Läraren undervisar alltid *om något* som eleverna förväntas utveckla sitt kunnande om. Vi har i SATSA avgränsat oss till hur *tal, tals egenskaper* och *hur tal används i problemlösning* görs till innehåll för undervisningen. På så sätt menar vi att det kan bli synliggjort vilka möjligheter som eleverna erbjuds för att lära om tal i den undervisning som de deltar i. Tal är en central del i matematiken eftersom tal representerar kvantiteter som återkommer i all matematik, vare sig man ska bestämma ett antal och finna ut hur många som saknas i en mängd, eller jämföra ytor, volymer eller sträckor, eller hantera samband och proportioner i grafer och diagram. Att ha en grundläggande taluppfattning, innebär att ha kunskaper om tals egenskaper och hur tal används i problemlösning. Sådana kunskaper är därmed mycket betydelsefulla för att unga elever ska kunna fortsätta att utveckla sina matematikfärdigheter.

Idag är forskningen överens om att kunskaper inte direkt kan förmedlas till elever: Då hade inte läraren behövts! Kunskapsutvecklingen är istället en process där olika delar av ett kunskapsinnehåll skiljs ut och studeras ur olika perspektiv för att bidra till en mer fyllig och nyanserad förståelse av innehållet som helhet. Läraren är oerhört viktig i den processen. Läraren måste göra det möjligt för eleven att få syn på innehållet på sätt som denne inte gjort tidigare. I matematikundervisning används därför ofta olika material, bilder och symboler som på olika sätt kan visa på egenskaper och samband hos tal. Material, bilder och symboler är i sig inte tillräckliga för att förmedla innebörder och mening, utan det är när lärare och elever undersöker och använder dessa som matematiken kan framträda. Hur innehållet behandlas genom material, bilder, symboler, ord och gester är därför en central del av undervisningen.

Elevers taluppfattning som startpunkt och mål

Det finns mycket forskning som behandlar matematiklärande och som beskriver kognitiva processer och utvecklingslinjer i barns tänkande. Taluppfattning och räknefärdigheternas utveckling är ett av de största områdena inom det breda forskningsfältet “matematiklärande”, så egentligen vet vi ganska bra hur barn på olika sätt använder tal för att bestämma antal och lösa problem där kvantiteter (mängder) förändras på något sätt. Den stora utmaningen ligger i hur kunskaper från forskning om barns matematiska tänkande och taluppfattning kan komma eleverna till del genom undervisningen så att deras utveckling och lärande stöttas.

Det har gjorts många undersökningar av hur barn utvecklar förståelsen för att räkneord betyder “hur många”, vilket man brukar kalla tals kardinalitet. Detta är en grundläggande egenskap hos tal, som gör att man kan ta reda på och beskriva exakt hur många föremål som finns i en avgränsad mängd (som en samling av föremål). Trots att barn redan tidigt lär sig att ramsräkna till tio eller hundra, så är det inte självklart att de kopplar samman ramsräkningen med exakta antal och har förståelse för

talens kardinalitet. Forskning av bland andra Karen Wynn[7] och Barbara Sarnecka med flera[8] har visat ganska samstämmigt att de flesta barn från 4-årsåldern, oberoende av i vilken språkmiljö de växer upp, förstår att "ett" betyder ett och bara ett, "två" betyder två stycken tillsammans, att vilket räkneord som helst motsvaras av ett exakt antal samt att om man lägger till ett föremål till en mängd, beskrivs antalet med nästa ord i räkneramsan.

Räkneramsan spelar en viktig roll i utvecklingen av räknefärdigheter, eftersom den också har en betydelse av ordinalitet. Räkneorden har en relation till varandra, de har sin bestämda plats och ordning. Men det är först när barn uppfattar att räkneorden samtidigt har betydelsen av kardinalitet och ordinalitet som de kan förstå att, om någon säger sig ha tre äpplen och får ett till så har denne fyra tillsammans och man behöver inte se äpplena framför sig och räkna hur många de är från början och hur många de blev efter att ett nytt äpple lades till. Detta lägger också grund för att förstå hur ett tal kan bestå av två eller flera mindre tal samt att det finns en relation mellan tal som är till hjälp när man behöver ta reda på en obekant mängd. Ett exempel är dukningsuppgiften som nämndes tidigare: Om det finns tre glas på bordet men det är åtta som ska äta, hur många glas fattas då? Denna uppgift klarar ganska få svenska 6-åringar av att lösa[9]. Uppgiften kan visserligen ofta lösas i vardagen genom att ta fram allt fler glas tills det är åtta glas på bordet, men vi vill ju gärna att barn ska kunna se hur tre och fem tillsammans är delar av helheten åtta, eftersom det bidrar till att de förstår addition och subtraktion som två sidor av samma mynt där vissa uppgifter är lättare att se och lösa som en addition (tre och någonting till är åtta) eller som en subtraktion (ta bort tre från åtta). Att se räkneuppgifter som talrelationer är ett mycket kraftfullt sätt att förstå tal, särskilt när man möter större tal och mer komplexa uppgifter i matematiken. Ett klassiskt exempel är uppgiften 201–199= där det är oerhört arbetsamt, om inte omöjligt, att "räkna ner" 199 steg från 201, istället för att se 199 och 201 som två närliggande tal. Då kan man enkelt få fram skillnaden mellan dem genom att lösa uppgiften som en addition "199 och två till är 201". Hur barn förstår tals egenskaper och hur tal relaterar till varandra spelar en viktig roll för hur deras räknefärdigheter utvecklas och är därför ett innehåll i matematiken som undervisningen behöver behandla.

I tidigare studier av elevers lärande om tal och räknande har det alltså visat sig att *kardinalitet, ordinalitet, tals del-helhets-relationer* och olika sätt att *representera tal* genom exempelvis bilder, med föremål eller siffersymboler, är betydelsefulla aspekter av taluppfattningen. Därför blir de också betydelsefulla som innehåll i undervisningen. Å andra sidan räcker det inte med att undervisningen handlar om ett innehåll för att eleverna ska lära sig. Det är *på vilket sätt* innehållet presenteras och bearbetas som kan visa på potential för lärande. Hur det specifika innehållet behandlas i undervisningen är därmed kärnan i SATSA:s kartläggning.

Verktyg för att kartlägga matematikundervisning i förskoleklass

I vårt arbete med att kartlägga matematikundervisning i förskoleklass har vi valt att använda verktyget "MPM-framework". Detta verktyg har utvecklats och prövats i forskning om matematikundervisning med yngre elever. MPM står för "Mediating Primary Mathematics"[10] och togs fram i ett utvecklingsprojekt där forskare och lärare arbetade tätt tillsammans med matematikundervisning i klassrummen över en längre tid. Precis som i SATSA-projektet studerades undervisning om tal och aritmetik, särskilt talrelationer, tals egenskaper och hur matematiska samband i uppgifter och exempel synliggjordes i undervisningen.

För att identifiera och beskriva skillnader i undervisningen tas i MPM-verktyget utgångspunkt i att lärarens handlande i undervisningssituationen är avgörande för elevers lärande. Verktyget är uppbyggt kring ett antal aspekter av undervisningen: 1) det material (artefakter) och 2) de notationer som används för att visa på 3) metoder för problemlösning, hur matematiska samband och strukturer synliggörs, samt hur elevernas svar och initiativ bearbetas och görs till del i undervisningen.

Med hjälp av MPM-verktyget kan undervisningen tolkas med avseende på i vilken utsträckning det matematiska innehållet lyfts fram och problematiseras så att det gynnar elevernas kunskapsutveckling. Samma material används ofta på olika sätt i undervisningen och kan då visa på en kvalitetsskillnad. I verktyget är respektive aspekt av undervisningen indelad i fyra nivåer, där högre nivåer innebär att undervisningen i större utsträckning pekar ut relationer, innebörder och lösningsmetoder som möjliggör för eleverna att se talrelationer och hur tal används i problemlösning. Lägre nivåer kan innebära att material och exempel används på ett ensidigt eller osammanhängande sätt och att elevsvar inte tas tillvara och utvecklas i undervisningen. Även om MPM-verktyget är framtaget i en annan kontext än den svenska ger resultat från studier där verktyget använts indikationer på kvaliteten i undervisning om tal i förskoleklass och tidigare skolår samt hur denna kan beskrivas men också utvecklas. Därför har vi valt att utgå från verktyget och anpassa det till svenska sammanhang i SATSA.

MPM-verktyget i svensk kontext

Den svenska läroplanen betonar att undervisningen ska uppmuntra elever att lösa problem samt pröva och omsätta idéer i handling. De centrala innehåll i matematik som betonas är: matematiska resonemang, olika sätt att lösa problem, olika uttrycksformer och särskilt naturliga tal, deras egenskaper och användning för att ange antal och ordning. Detta har vi tagit i beaktande i vår översättning och tolkning av MPM-verktyget, för att det ska kunna hjälpa oss att fånga den svenska matematikundervisningen med dess förutsättningar och målsättningar. En betydelsefull skillnad mellan den svenska kontexten och den som verktyget ursprungligen var utvecklat för är att i Sverige förväntas elever ofta vara mycket aktivt deltagande och att röra sig i klassrummet. Material används och undersöks ofta av lärare och elever tillsammans i en gemensam aktivitet, där eleverna förväntas ta initiativ och undersöka förslag på lösningar. Antalet elever i de svenska förskoleklasserna är i snitt 20–25 men för att alla elever ska kunna vara aktiva och bli sedda av läraren, delas ofta klassen upp i halvgrupp. Det läggs alltså stor vikt vid kommunikation och interaktion och de artefakter som används i undervisningen hanteras inte bara av läraren, utan ofta även av eleverna själva. MPM-verktyget är dock utformat så att den svenska förskoleklassens särart och de centrala innehåll som undervisningen ska omfatta kan fångas upp och studeras. Så här har vi översatt och tolkat verktygets tre ingående delområden:

1. Artefakter

Artefakter betyder fysiska material, manipulativt materiel och föremål av olika slag som både kan användas för andra ändamål och i undervisningssyfte (det kan till exempel vara pärlor på snören, äggkartonger eller klossar). Artefakterna konstrueras eller tillverkas inte under själva lektionen utan de finns färdiga och läraren har planerat hur de ska användas för att synliggöra det innehåll som undervisningen behandlar. Artefakterna har därmed ett medierande syfte, det vill säga att de ska förmedla eller visa på något.

2. Notationer

Notationer är sådant som läraren skriver eller ritar under lektionens gång, såsom symboler, bilder eller diagram. Syftet är att illustrera och tydliggöra innebörder av det som behandlas i undervisningen. Notationerna kan vara spontana men också planerade på förhand, men de görs i stunden.

3. Medierande gester och verbala uttryck

Medierande gester är sådant som läraren gör för att visa på samband eller för att representera innebörder i och mellan begrepp, vilket ofta också inkluderar verbala uttryck som förklarar. Här framkommer en tydlig koppling mellan lärarens handlingar (i ord och gester) och det innehåll som behandlas i undervisningen. Dels fokuseras de *metoder för att generera och värdera lösningar* som läraren synliggör för eleverna, dels fokuseras hur läraren s*ynliggör matematiska samband* genom användning av olika representationer och exempel så att matematiken blir begriplig för eleverna. Slutligen fokuseras hur läraren tar tillvara på *elevinspel i undervisningen*, bekräftar och stöttar elevers resonemang med förklaringar eller värderar svaren utifrån deras ändamålsenlighet för den aktuella problemlösningen.

Metoder för kartläggningen i SATSA

Kartläggningen är en del i att uppfylla syftet i SATSA-projektet och genomfördes som observationer i förskoleklass. Dokumentationen av undervisningen gjordes som fältanteckningar, det vill säga en forskare satt med i en undervisningssituation och antecknade med penna-och-papper vad som skedde i undervisningen, vilka exempel som lyftes fram och vilka material som användes. Noteringar gjordes också av hur material och metoder användes samt vilka frågor som ställdes. I vissa fall togs också foton (med lärarens tillåtelse) av material och notationer på tavlan. Fältanteckningarna har sorterats och innehållet klassificerats med hjälp av MPM-verktyget, som beskrivits ovan. Observationerna fångar specifikt undervisningen så som den genomförs i klassrummet och har kompletterats med ett kortare samtal med respektive lärare kring syfte och mål med den observerade undervisningen.

Var har vi gjort skolbesök?

Inför kartläggningen kontaktades tolv kommuner vars skolor erbjöds att delta i kartläggningen. I tio kommuner tackade skolhuvudmän eller rektorer ja till att medverka och inom dessa svarade 105 lärare i förskoleklass att vi var välkomna att besöka deras klassrum under en matematiklektion hösten 2021. I arbetet med att kartlägga matematikundervisning i förskoleklass har vi besökt 56 olika skolor, totalt 95 klasser. Bortfallet beror på sjukdomsfall eller ändrade arbetsförhållanden. De förskoleklasser vi har besökt finns i både större och mindre kommuner i södra Sverige. Skolorna är belägna i städer av skiftande storlek och på mindre orter på landsbygden. Skolornas storlek och elevsammansättning varierar. Det antal elever som funnits i undervisningsgrupperna vid våra observationer har varierat mellan 4 och 28 barn.

Vilka är förskoleklasslärarna?

Den svenska lärarutbildningen har ändrats flera gånger under de senaste årtiondena, vilket gör att det finns en stor variation av examina bland yrkesverksamma lärare i förskoleklass. Av de 95 lärare som vi besökt säger sig 60 av lärarna vara förskollärare, vilket kan innebära såväl förskollärarexamen (examensform som infördes efter 2011) som lärarexamen med inriktning mot tidiga åldrar (examen tidigare än 2011). Ungefär hälften så många (31 lärare) säger sig vara grundlärare, lågstadielärare eller motsvarande och 4 lärare anger att de har en lärarexamen som riktas mot fritidshem. Erfarenheten av att undervisa elever i förskoleklass varierar tidsmässigt mycket bland de lärare vi besökt, från nyutexaminerade lärare som gör sin första termin som lärare till lärare som arbetat 28 år i verksamhet med 6-åringar. I genomsnitt har de lärare vi besökt arbetat 7 år i förskoleklass.

Vad har vi dokumenterat?

I de 95 undervisningstillfällen som vi kartlagt har i huvudsak en lärares undervisning varit i fokus. I en del klasser arbetar flera lärare, men för att underlätta vår dokumentation har vi då valt att följa en av dem. Märk väl att det är den undervisning som genomförs i klassen som vi har dokumenterat, inte enskilda lärare, även om det naturligtvis är lärarna som genomför undervisningen.

Vid ett och samma undervisningstillfälle är undervisningen ibland indelad i olika episoder. Vi har valt att dela upp observationerna när det varit uppenbart att ett nytt innehåll lyfts fram, till exempel när läraren säger "nu går vi över till något annat" eller på annat sätt signalerar ett byte. Det innebär att vi har dokumenterat 145 unika undervisningsepisoder under de 95 besök vi har gjort.

Kartläggningen fokuserar på undervisningen och specifikt när lärare och elever interagerar och uppmärksamheten är riktad mot ett matematiskt innehåll. Detta medför att lärarens handlingar fått stort utrymme i våra observationer. Det gäller både hur läraren presenterar det matematiska innehållet och hur hon eller han svarar på elevernas inspel som berör detta innehåll. När eleverna arbetar med uppgifter individuellt eller i mindre grupp, och då läraren inte själv aktivt interagerar med elevgruppen, har däremot inte ingått i vår kartläggning. Om och när läraren sammanfattar och lyfter det som eleverna har gjort i det enskilda arbetet till diskussion, det vill säga att läraren då samlar gruppen och sammanfattar eller utvecklar innehållet vidare, ingår däremot i våra observationer.

Översikt – vad har vi sett i förskoleklassernas matematikundervisning?

I detta avsnitt presenterar vi resultatet från vår kartläggning av matematikundervisning i förskoleklass. Först ges en översiktlig beskrivning av utfallet från våra observationer. Därefter presenteras en mer djupgående diskussion om vilka lärandemöjligheterna är i den svenska matematikundervisningen i förskoleklass, med exempel hämtade från kartläggningen.

Utfallet av observationerna

Med stöd i MPM-verktyget fann vi skillnader i hur artefakter och notationer används i undervisningen, hur det matematiska innehållet behandlas för att synliggöra lösningsmetoder och samband samt hur elevinspel tas tillvara i undervisningen. En tydlig skillnad syns i observationer av obefintliga eller enbart bekräftande inslag om det matematiska innehållet, som kontrast till undervisning som har tydliga inslag av att innehållet bearbetas på ett matematiskt utvecklande sätt. Utfallet av observationerna redovisas nedan grafiskt och i text med avseende på dessa två karaktärsdrag och vad de för med sig för elevers möjligheter att lära om tal, tals egenskaper och användning i problemlösning.

Artefakter

Vid nästan samtliga av de undervisningstillfällen vi observerat har artefakter använts. Vid de få observationer (ett tiotal) där artefakter inte har använts av läraren, har innehållet behandlats i form av sånglekar och rörelselekar där antal och tal synliggjorts till exempel som verbala räkneord och rörelser istället. Andra tillfällen, när artefakter inte har använts, är där notationer på tavlan gjorts under tiden undervisningen pågått och artefakter har på så sätt ersatts med notationer.

Av diagrammet i bild 1 kan vi utläsa att i ungefär en tredjedel av observationerna är artefakter inte inkluderade i undervisningen eller så används artefakter på ett sätt som inte bidrar till att eleverna kan få syn på talrelationer, till exempel om pinnar enbart används för att markera poäng och läggs i en hög som räknas samman en-och-en när ett spel är avslutat. Däremot används artefakter på ett

utvecklande sätt i mer än två tredjedelar av observationerna. Det innebär att de artefakter som läraren använder i undervisningen öppnar upp för att strukturera tal så att matematiska samband och innebörder framträder, till exempel grupperade objekt i rader om 10. En sådan gruppering ger en överskådlig bild av ett antal tio-enheter som gör större mängder hanterbara i problemlösning.

Vår slutsats är att de artefakterna som valts och används har stor potential att kunna bidra till elevernas förståelse för tals egenskaper och användning, även om läraren kanske inte alltid till fullo utnyttjar materialets potential. Detta gäller också undervisning där artefakter används på ett strukturerat sätt. I dessa fall synliggörs talrelationer och hur tal kan användas i problemlösning genom att läraren via gester och verbala uttryck tar stöd i de samband som artefakterna erbjuder. Till exempel genom att läraren systematiskt visar hur talkombinationer utgör del-helhets-relationer som kan representeras med kuber, såsom alla talpar till helheten 3: 0+3 kuber, 1+2 kuber, 2+1 kub och 3+0 kuber.

Bild 1. Artefakter används på ett strukturerat sätt som visar på tals egenskaper och talrelationer att använda i problemlösning och undervisningen är därmed utvecklande. Osystematisk hantering av objekt som inte är strukturerade till sin utformning är begränsande och bidrar inte till att utveckla elevernas tal-uppfattning.

Notationer

Endast i drygt en tredjedel av observationerna används notationer, det vill säga skriftliga anteckningar som görs i stunden, vilket innebär att många undervisningstillfällen inte nyttjar potentialen i notationer för matematikundervisning. En orsak kan vara att notationer inte alltid är lämpliga i den form och aktivitet som undervisningen görs till exempel i sånglekar, eller där artefakter såsom klossar används för att dokumentera antal.

I bild 2 kan vi se att när notationer används så sker det ofta på ett bekräftande sätt, till exempel att läraren enbart skriver upp elevsvar och förslag på tavlan, men inte gör en systematisk överblickbar bild av svaret. Ett sådant exempel är att notera poäng som streck på rad, ett efter ett. Dock finns det exempel på notationer som skrivs på sådant sätt att de visar på talrelationer och därmed hjälper eleverna att se och upptäcka strukturer och samband. Det kan handla om att poängräkning görs och noteras som gruppering i fem (fem streck bildar en grupp) och därmed bildar fem-strukturer. I de få fall där notationerna struktureras synliggörs talrelationer och tals egenskaper och undervisningen skapar möjlighet för eleverna att utveckla sin förståelse om tal.

Bild 2. Notationer är bekräftande när de dokumenterar elevsvar eller presenterar endast en lösning på en uppgift. Notationer är utvecklande när de används på ett strukturerat sätt som synliggör talrelationer och tals egenskaper.

Metoder

Hur tal kan används för att lösa problem är ett återkommande innehåll i matematikundervisningen. De flesta undervisningstillfällena inbegriper uppgifter och problem av olika slag som eleverna uppmanas lösa. Därmed får de möjlighet att lära sig både om tals egenskaper och hur tal används. Lärarens bidrag här är dels att erbjuda metoder för att lösa problem och uppgifter, dels att motivera och försäkra sig om att förslag på lösningar stämmer.

Även när det gäller lösningsmetoder visar vår analys på en tydlig skillnad i undervisningen. I ungefär två tredjedelar av observationerna (se bild 3) stannar läraren vid att bekräfta elevers förslag på lösningar. Förslagen problematiseras inte, ej heller uppmärksammas det om det är lämpligt att lösa den aktuella uppgiften på ett visst sätt. Till exempel godtas att antal alltid kan bestämmas genom att räkna upp alla föremål ett åt gången, eller så erbjuds endast en metod som leder till en lösning på problemet. Den tredjedel av observationerna som vi tolkar är utvecklande till sin karaktär, innebär att läraren problematiserar olika lösningsförslag, jämför lösningsmetoder och värderar vad som är bäst att göra i ett visst sammanhang, såsom om det är nödvändigt att räkna alla föremål eller om det är möjligt att uppfatta antalet genom att känna igen mönster när man ordnar föremål i grupper om fem eller tio.

Bild 3. Bekräftande undervisning erbjuder eleverna en lösningsmetod som inte problematiseras i förhållande till dess lämplighet, eller i kontrast till andra möjliga lösningsmetoder. Utvecklande undervisning innebär att flera lösningsmetoder bearbetas och värderas i förhållande till den aktuella uppgift som ska lösas.

Matematiska samband

Att utveckla kunskaper om tals egenskaper och hur tal kan användas i problemlösning förutsätter insikter om matematiska samband, till exempel mellan symboler och antal eller hur ett tal kan förstås som sammansatt av mindre tal. Vi finner att lärare i hälften av observationerna (se bild 4) uppmärksammar sådana samband. Läraren använder en variation av exempel och representationer och lyfter på ett systematiskt sätt fram samband för eleverna. Väl valda exempel där likheter och mönster, men också olikheter, pekas ut är karakteristiskt för undervisningen som är utvecklande, särskilt då exempel jämförs med varandra samtidigt eller då samband visas med hjälp av flera olika representationsformer. Dock ser vi också att i hälften av observationerna skulle matematiska samband kunna utgöra en del i undervisningen, men istället ges exempel isolerade och utan koppling till andra exempel eller andra representationer (se bild 4). Då uteblir problematiseringen och begränsar därmed möjligheterna för eleverna att förstå tals egenskaper på ett fördjupat sätt.

Bild 4. Enbart bekräftande undervisning innebär att exempel behandlas isolerat och samband mellan olika representationer konstateras men problematiseras och utvecklas inte. Kopplingen mellan till exempel olika representationsformer, samt kontrasterande exempel som jämförs samtidigt, pekas däremot ut för eleverna i utvecklande undervisning.

Elevinspel

I den svenska förskoleklassens undervisning får ofta eleverna vara delaktiga och ta plats i klassrummet. Det sker både genom att eleverna fysiskt rör sig i rummet, till exempel genom att gå fram och visa på tavlan inför klassen hur de resonerar, och i kommunikation där läraren frågar eleverna om förslag på lösningar. Elevinspel är därmed en naturlig del i undervisningen men hur elevernas inspel tas tillvara varierar.

I bild 5 kan vi se att det endast är i en tredjedel av observationerna som elevinspel tas tillvara och utvecklas av läraren. Då detta sker är det till exempel genom att läraren upprepar elevsvar och utvecklar dem genom förklaringar, ger kontrasterande exempel eller kopplar till vad man tidigare berört i undervisningen. När läraren tar tillvara på elevinspelen blir dessa en betydelsefull del i en utvecklande undervisning. I de flesta observationerna stannar dock undervisningen vid att elevernas lösningsförslag bekräftas av läraren som korrekta svar eller förslag, men problematiseras inte så att innebörden av förslaget vidgas eller fördjupas.

Bild 5. Bekräftande undervisning innebär att läraren uppmuntrar elevsvar och initiativ, men dessa utvecklas inte. En utvecklande undervisning tar avstamp i elevsvar och initiativ som utvecklas genom förklaringar och fördjupande exempel.

Vad betyder utfallet av kartläggningen för elevers lärande?

Undervisning har alltid som mål att bidra till elevers lärande, att elever ska utveckla sitt kunnande om det som undervisningen har behandlat. En naturlig följd av att kartlägga undervisning är följaktligen att dra slutsatser om vilka möjligheter till lärande som den observerade undervisningen har erbjudit. Vad eleverna de facto lär sig kan denna kartläggning inte ge svar på. Däremot kan den ge en bild av de förutsättningar för lärande som getts i undervisningen.

Den översikt av matematikundervisning i förskoleklass som vi har presenterat med stöd av MPM-verktyget visar tydligt på flera utvecklingsområden. Det handlar främst om hur undervisningen ska utformas så att det begreppsliga kunnandet hos eleverna utvecklas och fördjupas. Flera förutsättningar finns för detta. Bland annat genom de väl valda artefakter och den inramning av undervisningen som observerats, då detta kan göra det matematiska innehållet meningsfullt för eleverna. Det som mer sällan observeras och som därmed utgör ett utvecklingsområde, är att lärare inte bara ger eleverna problem att lösa, utan att de också uppmärksammar de metoder som eleverna använder, så att lösningsmetoderna kommer att stå i centrum och blir föremål för undersökning, jämförelse och värdering. Det vill säga att metoder för problemlösning inte enbart blir ett sätt att få (rätt) svar på en uppgift, utan att dessa i sig kan uppmärksammas och därmed göras till ett specifikt innehåll i undervisningen. På så sätt kan reflektioner kring problemlösningsmetoder fördjupa förståelsen, till exempel när metoderna är användbara, vad de har för begränsningar men också hur de kan användas för att påvisa samband och relationer. Det finns starkt stöd i forskningen[11,12] att detta är en betydelsefull del i att lära sig matematik. Tillgång till flera metoder och strategier, samt kunskaper om metodernas förtjänster och begränsningar är en av de aspekter som leder till framgångsrik problemlösning och matematisk förståelse också på lång sikt. Om elever i tidiga skolår inte ges

möjlighet att pröva, jämföra och värdera olika lösningsmetoder i sammanhang som är överskådliga och begripliga för dem, finns det en risk att de utvecklar ett förhållningssätt till matematik och problemlösning som är procedurellt, det vill säga att det finns *en* rätt och riktig metod att tillämpa för att lösa ett visst problem. I mer avancerad problemlösning i matematik vet vi däremot att det ofta finns flera sätt att lösa problem, men att vissa sätt är mer lämpliga och effektiva än andra och att framgången ligger i att veta hur man ska avgöra och välja det mest lämpliga sättet för att hantera ett problem.

Undervisningen i förskoleklassen berör grundläggande egenskaper hos tal, vilket för med sig att lärarna använder en hel del konkret material (artefakter) och exempel från elevernas vardagserfarenheter. På så sätt knyts olika representationer, exempel och kontexter samman och skapar möjlighet för eleverna att se hur samma innebörd kan uttryckas på olika sätt och i olika sammanhang. Detta är en styrka som vi har identifierat i våra observationer. I och med att tal är abstrakta och behöver konkretiseras för att kunna kommuniceras och användas i problemlösning, ser vi detta som en viktigt grund för att stötta eleverna att utveckla bland annat symbolförståelse. På motsvarande sätt kan även relationer inom och mellan tal tydligare lyftas fram och undersökas tillsammans med eleverna genom att undersöka strukturer och samband, för att på så sätt bidra till en djupare förståelse för tals egenskaper och hur tal kan användas. Forskning om matematikfärdigheter bland skolnybörjare har visat att, beroende på hur tal förstås och används, som adderade en-heter för att bestämma en mängd, eller som sammansatta helheter där också obekanta delar kan listas ut, kan vara avgörande för hur eleven lär sig tillämpa nya metoder och principer[4,13]. I de aktiviteter som eleverna bjuds in att delta i finns det många möjligheter att undersöka tals egenskaper och användbarhet, exempelvis genom att pröva och värdera olika lösningsmetoder. Ett större fokus på detta skulle stärka eleverna i att se matematik som användbart i problemlösning och inte begränsas till procedurer.

Matematik kan beskrivas som numeriska system och strukturer (jämför till exempel tiobassystemet och talserier som 2, 4, 6, ...) där strukturerna ger stöd för problemlösning och resonemang. Därför blir matematiska samband en viktig grund för fortsatt lärande i matematik. Våra observationer visar dock att undervisningen kan utvecklas ytterligare genom att lärarna gör tydligare kopplingar *inom* och *mellan* exempel. Detta skulle också kunna ske om de systematiserar de undersökningar som görs tillsammans med eleverna, så att de matematiska sambanden framträder på ett tydligt sätt. Detta kan till exempel göras genom att visa hur inte bara *ett* antal utan flera olika antal (en grupp av tre glassar jämte en grupp av fyra glassar) representeras i siffersymboler (3, 4) *samtidigt* som siffersymbolerna ses i relation till varandra i en strukturerad talrad eller räkneramsa (3 kommer före 4, som kommer före 5 osv.). För att detta ska vara möjligt krävs en god ämnesdidaktisk kunskap hos läraren, det vill säga insikter om vad eleven måste få syn på för att förstå innehållet på ett mer utvecklat sätt och hur detta ska göras synligt, begripligt och överskådligt för eleven i undervisningen. Lärarna måste då ha förutsättningar, både kunskapsmässigt och resursmässigt, för att planera undervisningen på detta sätt.

Att undervisa på sätt som fördjupar elevers begreppsliga förståelse för tal innebär *inte* att arbeta med större talområden (hundratal och tusental) eller övergå till räknande med enbart symboler. I de fall vi observerat att undervisningen tar en sådan riktning uteblir nödvändiga förklaringar och kopplingar till tidigare kunskaper som skulle kunnat göra det nya begripligt. Eftersom eleverna inte får det begreppsliga stöd de behöver (eller kan ta till sig mot bakgrund av sina tidigare erfarenheter och kunnande) blir matematiken reducerad till uppgifter som ska göras enligt en särskild procedur. Procedurella färdigheter utan begreppslig grundförståelse (att göra utan att förstå vad eller varför man gör något) är inte utvecklingsbart. Detta har mångårig forskning om matematiklärande hos elever i olika åldrar visat. Om undervisningen begränsar sig till isolerade exempel och ständigt fokuserar nya innehåll, finns det en risk att eleverna aldrig får den djupare förståelsen för matematiska samband som de behöver för att utveckla hållbara kunskaper. Undervisningssituationer som vi finner är

utvecklande är sådana där läraren stannar kvar i ett innehåll och undersöker egenskaper och samband hos tal och där likheter och skillnader lyfts fram tillsammans med eleverna. I Lgr11 finns inte specifika kunskapsmål som eleverna ska uppnå efter året i förskoleklass och därmed finns det inte heller formella krav på specifikt innehåll som måste hinnas med under förskoleklassåret. På så sätt bör det finnas förutsättningar för ett sådant sätt att undervisa där man stannar kvar i och fördjupar de innehåll man undervisar.

Slutligen framträder en bild av undervisningen där elevers svar, inspel och förslag till lösningar ofta blir bekräftade, ibland bekräftas till och med felsvar. I observationerna framträder dock en tendens att undervisningen stannar vid att bekräfta elevernas svar, varvid det tycks gott nog att de är delaktiga och presenterar ett svar. Mer sällan bidrar undervisningen med att utveckla elevernas svar och inspel. Här finns en stor utvecklingspotential. Potential, därför att den svenska skolan inklusive förskoleklassen är starkt inkluderande och kommunikativ, där eleverna ska göras delaktiga i sitt lärande, ofta genom att aktivt undersöka och föreslå lösningar på gemensamma problem. I de goda exempel som vi har observerat, tar läraren vara på elevernas svar. Dessa blir då exempel som lyfts fram i ett systematiskt undersökande och jämförande resonemang där elevsvaren utvecklas genom att läraren ger fler exempel, kontrasterande exempel, förklaringar och generaliseringar. Vi ser detta som ett centralt utvecklingsområde eftersom det knyter samman alla de ovanstående, det vill säga hur artefakter och notationer används för att belysa likheter och olikheter, samband och mönster mellan och inom uppgifter och exempel.

Olika möjligheter till lärande

I de tidigare avsnitten har vi översiktligt redogjort för vad analysen utifrån MPM-verktyget visat som olikheter i sätt att undervisa om tal, tals egenskaper och tals användning i problemlösning. Den analysen har gett oss en bild av vilka områden i undervisningen som har utvecklingspotential och alltså kan förbättras för att gynna elevernas kunskapsutveckling. I den text som följer kommer vi att mer i detalj beskriva undervisning som kan ses som utvecklande och även sådan som inte i lika hög grad ses som utvecklande, med hjälp av exempel hämtade från våra observationer. Vi belyser vad som tycks göra skillnaden mellan enbart bekräftande undervisning och den mer eftersträvade utvecklande undervisningen som framträtt i observationerna.

Innehåll som behandlas i undervisningen

Undervisning har alltid som mål att eleven ska lära sig något om något. Visserligen anger läroplanen att elever i förskoleklass ska ges möjlighet att utveckla förståelse av tal, tals egenskaper och hur tal kan användas i problemlösning, vilket också lett oss till vad vi är intresserade av att närmare studera i projektet. Men för att "tal” ska bli ett innehåll i undervisningen måste läroplanens beskrivning brytas ner av läraren till mindre och mer avgränsade delar, som pusselbitar av ett omfattande innehåll. Det betyder att det finns många pusselbitar som läraren hade kunnat välja att lyfta fram i undervisningen vid det tillfälle som vi besökte klassrummen. Eftersom vi besökt ett stort antal klassrum, kan vi få en rätt god bild av vilka aspekter av tal som görs till innehåll i undervisningen i förskoleklasserna.

Observationerna visar att det matematiska innehåll som lärarna undervisat om kan delas in i fyra övergripande teman: 1) *Tals innebörd och struktur* 2) *Representationer av tal*, 3) *Talrelationer* och 4) *Aritmetiska operationer*. Matematikundervisning är en komplex verksamhet och det som lärarna arbetat med i sin undervisning kan ofta kopplas inte bara till ett av dessa teman, utan ibland till både två, tre eller fyra av dem.

Tals innebörd och struktur

Det första temat handlar om tals egenskaper, både talens innebörd (vad talen betyder) och deras struktur (hur tal och talsystem är uppbyggda). Detta tar sig oftast uttryck i undervisning om räkneord, räkneramsan och i förlängningen talbaser (tiobassystemet). När undervisningen handlar om tal blir räkneorden uttryck för en kvantitet som behandlas på något sätt i problemlösning. Men tals innebörd och struktur kan också utgöra innehåll för lärande i sig självt.

Tals innebörd

För att kunna använda tal, antingen för att bestämma ett antal i en mängd eller för att operera med tal i problemlösning (till exempel att ta reda på hur många som saknas i en mängd), behöver eleverna ha en god taluppfattning. Det vill säga, eleven behöver förstå vad tal betyder, när och hur de kan användas, alltså ha kunskaper om tals egenskaper. Tal används oftast för att besvara frågan "hur många?" och då är förståelsen av tals kardinala egenskaper central. Gäller frågan hur tal relaterar till andra tal, till exempel ordningen i räkneramsan, är det egenskapen ordinalitet som kommer i förgrunden. För att använda tal i problemlösning förutsätts oftast kunskaper om talrelationer, det vill säga att kunna uppfatta tal som sammansatta av delar som tillsammans utgör en helhet (till exempel att talet 7 består av 5 och 2). Man kan säga att egenskaperna hos tal utgör *aspekter* som var för sig och tillsammans bygger upp vad tal innebär och hur tal kan användas. I undervisningen ser vi att dessa aspekter, samt representationer av tal i ord, bild och symboler, görs till innehåll för lärande och på så sätt bidrar till att eleverna får utveckla grundläggande förståelse för vad tal är.

I flera observationer har vi sett att lärarna arbetar med att låta eleverna "se" och identifiera små mängder utan att räkna varje föremål ett och ett. Att "se" och uppfatta små mängder kallas för att subitisera. Förmågan att se mindre antal skiljer sig från uppräkning där varje enskild del i en mängd räknas för att bestämma det totala antalet. Att se antal handlar alltså om att uppfatta helheten före delarna. Flera lärare har använt tärningar och låtit eleverna identifiera antal genom tärningsmönstren. Lärarna har uppmuntrat eleverna att se prickarna som ett mönster som representerar olika antal. Detta gör det möjligt att direkt kunna tala om hur många prickar som tärningen visar istället för att behöva räkna prickarna en och en. Att se och urskilja mönstret kan bli ett stöd i att bestämma antal och genom undervisning kan eleverna utveckla en medvetenhet kring detta.

> Läraren gömmer fem knappar ordnade som tärningsmönstret för fem under en liten duk. Hon lyfter undan duken och låter eleverna få se knapparna några sekunder innan hon täcker över dem igen. Hon frågar eleverna om de kan säga hur många knappar de såg. Flera elever svarar samtidigt att de såg fem knappar. Läraren frågar nyfiket hur de kunde veta att det var fem knappar. En elev svarar genast "Jag såg det". Läraren lyfter undan duken och lägger ut en femgrupp i oordning bredvid den ordnade femgruppen och frågar eleverna om det är lättare eller svårare att se antalet i den oordnade femgruppen jämfört med den femgrupp där knapparna är ordnade i ett mönster.

Subitisering, det vill säga att direkt uppfatta ett exakt antal, är en intuitiv kognitiv process, men kan också bli ett redskap för att hantera kvantiteter. I aktiviteten där antalet knappar ska uppfattas på ett ögonblick riktar läraren uppmärksamheten på tals innebörd av kardinalitet, genom att eleverna uppmanas att "se" antalet som en samling delar istället för att se dem som en och en som måste räknas fram. Det hinner eleverna nämligen inte göra under de sekunder knapparna syns. Räkneordet "fem" som beskriver mängdens kardinalitet blir på så sätt ett riktat och avgränsat innehåll i undervisningen.

Att arbeta med ett specifikt tal vid ett undervisningstillfälle, ibland omnämnt som dagens/veckans tal, är ett annat tema som återkommer i våra observationer. Ett specifikt tal står då i fokus och undervisningen erbjuder eleverna att ta del av flera olika sätt att identifiera talet. Det görs genom att visa på olika aspekter av talet ifråga.

> Läraren berättar för eleverna att de ska arbeta med veckans tal. ”Vi har ett nytt veckans tal. Vi ska se om ni kan lista ut vad det är för tal. Lyssna på ledtrådarna och räck upp handen när du tror att du vet vilket tal det är. Avslöja inte vad du tror, utan låt alla kompisar tänka efter i lugn och ro. Då ska vi se. Nu kommer ledtrådarna. Den första ledtråden är att talet är större än tre men mindre än sju (läraren pekar på talen på tallinjen som finns uppsatt på tavlan). Den andra ledtråden: Vi har så här många arbetsbord i förskoleklassen. Och den tredje ledtråden är att vi har så här många skoldagar varje vecka. Den fjärde ledtråden är att talet är det näst högsta antalet man kan få när man slår en tärning. Och den sista ledtråden är att du har så här många fingrar på varje hand. Vet ni vad det är för tal?”. Eleverna svarar ”fem” i kör och är eniga om att det är veckans tal.

Efter att eleverna listat ut vilket tal det handlade om, går läraren igenom ledtrådarna tillsammans med eleverna. Här uppmärksammar läraren eleverna på att tal har många betydelser och återfinns i olika sammanhang. “Talet är större än tre men mindre än sju” samt “näst högsta antalet man kan få när man slår en tärning” visar på att tal har en inbördes ordning, en relation till varandra som gör att man kan lista ut var i ordningen det eftersökta talen kan befinna sig. “Vi har så här många arbetsbord i förskoleklassen” pekar ut antal, det vill säga kardinaliteten i tal som gör att vi kan bestämma exakt antal bord eller andra objekt i en avgränsad mängd. Och även “så många skoldagar i en vecka” och “så många fingrar på en hand” pekar på innebörden av exakta antal, men även att talet som frågas efter kan ingå i en större helhet (veckan har sju dagar och talet är en del av de sju). De olika sammanhangen som ledtrådarna illustrerar lyfter fram aspekter av tal som fördjupar deras innebörd och mening, vilket hjälper eleverna att både lösa uppgiften (identifiera talet) och bidrar till en breddad förståelse för talets egenskaper.

Efter att eleverna har kommit fram till att dagens tal är fem, plockar läraren fram en låda med olika föremål som då används som representationer av talet: fem legobitar, fem saker på en bild, en tärning, ett sifferkort, fem skrivet med bokstäver och en tallinje. Läraren visar här genom variationen av representationer av talet fem hur tal återfinns i olika sammanhang och har något olika innebörder beroende på sammanhanget och vidgar på så sätt ytterligare möjligheten att förstå tal som beskrivning av exakt antal och hur tal förhåller sig till andra tal såsom en position på tallinjen. Representationerna är på så sätt viktiga för att visa samma och olika innebörd av tal.

En ensidig användning av representationer (till exempel att endast använda siffersymboler när man pratar om antal) begränsar möjligheterna att få syn på till exempel kardinaliteten och ordinaliteten hos tal. Vi ser dock i ett flertal observationer att lärare gärna lyfter fram innebörden av tal i olika sammanhang, till exempel genom att peka på klockans urtavla, samla olika typer av föremål men samma antal, samt identifiera var siffersymboler finns i elevernas omgivning. Detta erbjuder på så sätt eleverna bredare erfarenheter av vad tal är och hur tal används, förutsatt att den variation i innebörd som sammanhangen fordrar lyfts fram till diskussion med eleverna.

Tals struktur

I observationerna läggs i flera fall tyngdpunkten på att räkneorden i räkneramsan alltid kommer i en bestämd ordning, vi räknar exempelvis “ett, två, tre” och inte “ett, tre, två”, samt “tjugonio, trettio, trettioett” och inte “tjugonio, tjugotio, tjugoelva”. Det finns alltså en struktur och ordning som eleverna uppmärksammas på när de ofta i kör tillsammans med övriga elever och läraren säger räkneorden i ordningsföljd. När yngre barn börjar använda räkneord och räkneramsan är de inte alltid kopplade till antal eller kvantifiering. Ibland sägs att ett barn kan räkna till fem när barnet i själva verket visat att han eller hon kan ramsräkna till fem, det vill säga räkneorden används som en ramsa som barnet memorerat men som inte har med antal eller kvantifiering att göra. Att kvantifiera betyder att barnet förstår att räkneramsan kan användas för att ta reda på ett exakt antal i en mängd och inser

vad tal (eller räkneord) kan användas till. Här följer ett exempel på en aktivitet där räkneramsan *inte* har ett kvantifierande syfte:

> I en klass startar läraren lektionen med ramsan "Två troll sparkar boll, i en papperskorg. Hur många mål gör de?". Eleverna står samlade i ring, en elev står i mitten av ringen. Läraren och eleverna läser ramsan tillsammans i takt samtidigt som eleven i mitten pekar på en kompis i taget i ringen. Den kompis som eleven i mitten pekar på när ramsan är slut får säga ett valfritt tal. I detta fall svarar eleven sju. Eleven byter plats med sin kompis och står nu i mitten av ringen. Alla räknar högt tillsammans till sju samtidigt som eleven i mitten pekar på en kompis i tur och ordning för varje räkneord i räkneramsan. Läraren är uppmärksam så att eleven som står i mitten och pekar gör det på ett korrekt sätt: en kompis – ett räkneord.

Här ges eleverna först och främst möjlighet att träna på räkneordens ordning. Även om eleverna förstår att det finns en idé med att para samman ett räkneord och ett objekt så kan det ibland vara svårt med koordineringen. Det är inte ovanligt att man säger räkneorden fortare än vad man hinner peka på objekten som räknas. Att koppla ett räkneord till varje föremål är ett sätt att bestämma antal under förutsättning att eleven uppfattar dem som tal med innebörden kardinalitet.

Vi ser att eleverna i förskoleklass får erfarenheter av både uppåträkning och nedåträkning i ramsor och sånglekar och får på så sätt erfara vilka tal som kommer före respektive efter andra tal i räkneramsan. I många observationer använder lärarna siffersymboler, men fokus är alltjämt på talens stabila ordning. En lärare vi besökt lät sina elever börja med att ordna kort med talen 0–10 i ordning från minst till störst i en talrad på tavlan. Eleverna och läraren ramsräknade sedan högt tillsammans medan läraren pekade på korten med siffersymbolerna 0, 1, 2 och så vidare. Läraren var noggrann med att eleverna skulle säga räkneorden samtidigt som hon pekade på respektive sifferkort. Därefter räknade de också bakåt från 10 samtidigt som läraren pekade på ett sifferkort i taget. I denna aktivitet kopplas räkneorden i räkneramsan samman med talraden. Fortfarande är fokus inte på antal (kardinalitet) utan på den stabila ordningen av räkneord.

För att utveckla en korrekt och stabil räkneramsa som kan användas för att bestämma antal behöver barn många erfarenheter av att räkna i olika situationer och sammanhang, vilket vi ser att det görs i många av våra observationer. I vissa klassrum tycks ramsräknandet och den stabila ordningen dock vara det primära innehållet. En utvecklande undervisning bör däremot lyfta fram en vidgad innebörd, där räkneramsan används i syfte att bestämma antal (kardinalitet), och där tals relation till varandra i räkneramsan (ordinalitet) görs till innehåll för lärande. På så sätt får talen en mening och kan ses som användbar i problemlösning.

Att ha insikt om talstrukturer är även betydelsefullt för att kunna utveckla förståelse för tiobassystemet och vidare positionssystemet, där siffrorna i ett tal får olika värde beroende på vilken plats (position) som siffran står i förhållande till andra siffror i talet. Grunden för detta är att eleverna ser tal som ”units”, det vill säga som sammansatta delar, vilket i sin tur bygger på att eleverna urskiljer kardinaliteten i tal. I exemplet där läraren lägger knappar i oordning bredvid en samling av lika många knappar lagda i tärningsmönster, visar läraren på hur ett tal utgör en enhet av sammansatta delar som kan struktureras för att lättare kännas igen. I förlängningen kan man på så sätt resonera sig fram till tio-enheter och räkna tiotal (hellre än att räkna ett, två, tre… när antalet är stort). I kartläggningen ser vi också exempel på undervisning där talstrukturer behandlas på detta sätt och lekfullt leder eleverna till hur man kan göra ”två-skutt”, ”fem-skutt” och ”tio-skutt” när de ska hantera större antal (se även avsnitt om talrelationer).

Representationer av tal

Det andra temat handlar om representationer av tal. Tal gör det möjligt att bland annat ange exakta antal och jämföra mängder. Det finns särskilda ord (räkneord) och symboler (siffror) som används för att beskriva till exempel antal, en egenskap hos en samling objekt som annars är "osynlig" (man kan inte fysiskt uppleva antal utan det måste på något konkret eller symboliskt sätt illustreras, det vill säga representeras). Tal kan uttryckas och representeras på flera olika sätt. Olika representationsformer såsom konkret material, bilder eller symboler kan användas för att representera ett givet tal. God talförståelse handlar till en del om att kunna använda olika representationer av tal på ett flexibelt sätt. Att arbeta med olika representationer av tal kan därmed ses både som ett mål och ett medel i undervisningen för att utveckla elevernas förståelse för tal. Tal är å andra sidan komplexa till sin innebörd och olika representationer kan visa på olika aspekter av talens innebörd. I våra observationer har vi sett att lärare i förskoleklass arbetar med representationer av tal på olika sätt, bland annat genom att visa på en gemensam innebörd uttryckt genom olika representationsformer, eller genom att låta en representationsform vara samma men inkludera olika tal (koppla samman räkneord-siffra-antal), men också med tyngdpunkt på själva representationsformen där det numeriska (antal och tal) hamnar i bakgrunden.

Räkneord - Siffra - Antal

I undervisningen arbetar lärare på olika sätt med att koppla samman innebörden i *räkneord, siffra* och *antal*. Det är välkänt hur betydelsefullt det är att förstå innebörden av tal och hur tal kan uttryckas och representeras på olika sätt med bibehållen innebörd. Det finns en koppling mellan verbala räkneord och skrivna eller tryckta siffror och vi kan använda dem för att ange antalet föremål i en avgränsad mängd. Däremot är det inte givet vilken siffra som motsvaras av vilket räkneord, vilket blir uppenbart till exempel när man lär sig ett nytt språk och ska tolka vad varje nytt ord betyder. Innebörden måste därför synliggöras och bearbetas i undervisningen. Ett antal föremål kan uttryckas som ett tal vilket kan skrivs med hjälp av våra tio siffersymboler (0–9). Omvänt så kan också ett tal som är skrivet med siffersymboler uttryckas med ett räkneord och konkretiseras som ett antal objekt. Denna koppling ser vi är ett innehåll som förekommer ofta i undervisningen.

I flera observationer ser vi att lärare strävar mot att eleverna ska göra kopplingen mellan siffror de känner igen och kan namnge och motsvarande antal.

> En lärare börjar med att sätta upp ett kort med en siffra på tavlan och frågar sina elever vad det är för siffra. I kör svarar eleverna "ett". Läraren bekräftar elevernas svar och frågar sedan hur många ett är. Läraren ber en elev komma fram till tavlan och rita antalet ett under sifferkortet. Eleven funderar en liten stund framme vid tavlan och ritar sedan en glass under sifferkortet. Aktiviteten fortsätter och snart finns sifferkort 1, 2 och 3 med motsvarande antal ritade glassar under respektive sifferkort på tavlan. Läraren frågar då eleverna vad det är som händer för varje tal som lagts till. Läraren pekar på de bilder som eleverna ritat och säger "Först har vi en glass, sedan två glassar, och så tre glassar". En elev säger då att "Det blir en mer". Läraren svarar "Det stämmer. Det ökar och blir en mer för varje siffra vi lagt till i raden". Aktiviteten fortsätter och både 4 och 5 sätts upp på tavlan och motsvarande antal glassar ritas under respektive sifferkort på tavlan. Efter detta ramsräknar läraren och eleverna tillsammans framåt och bakåt på den talrad som de skapat tillsammans på tavlan.

I denna situation pekar läraren inte bara ut kopplingen mellan en siffersymbol och ett antal för eleverna, utan också relationen *mellan* symbolerna och mellan antalen, att det blir en mer för varje tillagd symbol som också följer den stabila ordningen i räkneramsan. På så sätt får representationerna av tal (räkneord, siffror och antal ritade objekt) inte bara en innebörd mellan olika representationsformer utan också i förhållande till andra exempel inom samma representationsform: siffrorna

förhåller sig till varandra på ett visst sätt, vilket också framträder när grupperna med ritade glassar jämförs mellan varandra.

En annan lärare arbetade med kopplingen mellan räkneord och antal och nyttjar fingrarna som ett annat sätt att representera tal. Hon säger slumpmässigt räkneord mellan 0–10 och eleverna visar motsvarande antal fingrar.

> Läraren inleder med att be eleverna skaka igång fingrarna och frågar dem sedan om de är redo. Eleverna svarar "Jaaa" i kör. Läraren säger "Sex". Eleverna håller upp sina fingrar och läraren sveper med blicken för att se att alla elever visar sex fingrar. Sedan ber läraren eleverna att visa ett, tre, noll, fem, åtta, sju, nio, två, fyra respektive tio med hjälp av sina fingrar. Vid ett par tillfällen uppmärksammar läraren att eleverna visar samma antal fast på olika sätt med sina fingrar. Läraren säger "Åtta. Man kan visa åtta på olika sätt med sina fingrar som ni gör. Antingen fem och tre eller fyra och fyra" (läraren visar samtidigt talkombinationerna med sina egna fingrar).

I denna situation gör läraren eleverna uppmärksamma på att en helhet (i detta fall talet 8) kan sättas samman av olika delar vilket gör det möjligt för eleverna att utveckla kunnande om relationer inom tal. Fingertalen är på ett sätt rikare representationer än siffersymboler, eftersom de halv-abstrakta fingertalen är ett mönster som eleven direkt känner igen som "åtta", men åttan kan sättas samman på olika sätt och hur delarna relaterar till varandra och till åtta kan undersökas så som läraren uppmärksammar i exemplet ovan. Siffersymboler ger inte samma möjligheter, de är hel-abstrakta och hur siffran 8 kan ses som 3 och 5 eller 4 och 4 är en tankeoperation och förutsätter att eleven redan har en god förståelse för siffersymbolerna som representationer av tal. Fingertalen å andra sidan kan hjälpa eleverna att utveckla förståelse för hur tal representeras i olika symboler, just i och med att de samtidigt kan uppfattas som symboler för tal och kan manipuleras som objekt att gruppera och omgruppera.

Att forma och skriva siffror

I vår kartläggning har vi också exempel på undervisning där målet är att eleverna lär sig forma och skriva siffror. Ibland är det lekfulla inslag där eleverna testar på att forma eller skriva siffror, ibland är huvudfokus på att eleverna formar och skriver siffersymboler på ett korrekt sätt. Tyngdpunkten ligger då på finmotoriska färdigheter, det vill säga att kunna koordinera öga-hand-rörelser och att spåra en siffra med fingret. Detta är visserligen en förutsättning för att kunna skriva siffror, men en del elever i förskoleklassen kan ha svårt med detta eftersom finmotoriska färdigheter ännu inte är fullt utvecklade hos sexåringar. Att träna på att skriva siffersymboler på ett korrekt sätt handlar inte om att arbeta med ett matematiskt innehåll. Att skriva siffror är inte matematik i sig utan siffror är de symboler som vi kan använda oss av för att uttrycka oss när vi arbetar med matematik, det är ett sätt att representera tal. Därmed inte sagt att eleverna inte ska ges möjlighet att träna sig i att forma och skriva siffror på ett lekfullt sätt i förskoleklassen, men det är viktigt att undervisningen inte leder till att eleverna uppfattar att matematik enbart handlar om siffror eller att matematikfärdigheter handlar om att kunna skriva siffersymboler.

Talrelationer

Det tredje övergripande temat i undervisningen fokuserar talrelationer. Talrelationer innebär att rikta uppmärksamhet mot tals helhet och delar och hur tal förhåller sig till varandra. Barn behöver en god taluppfattning för att kunna ta reda på förändringar och skillnader i antal. I våra observationer har vi sett att undervisningen främst fokuserar talrelationer inom talområdet 1–10, även om det också förekommer att lärare och elever undersöker tal upp till 100. Undervisningen handlar både om relationer inom tal och relationer mellan tal.

Relationer inom tal

"På vilka olika sätt kan man dela fem?". Relationer inom tal handlar om att se ett heltal, till exempel talet 5, och att det kan delas upp i mindre tal på olika sätt utan att helheten förändras. Exempelvis så kan talet 5 omgrupperas i mindre tal så som 1 och 4 eller 3 och 2. Att utveckla förtrogenhet med relationer inom tal, det vill säga de tio första talens del-helhets-relationer, gör det möjligt för elever att lösa både additions- och subtraktionsuppgifter på ett effektivt och flexibelt sätt. Att lära sig om relationer inom tal (som ibland kallas talkamrater eller talkompisar) innebär inte att eleverna enbart memorerar de olika talkombinationerna utan fokus ligger i att eleverna uppmärksammar och förstår hur tal kan omgrupperas på olika sätt men att helheten förblir densamma. En användbar fråga i sammanhanget är "Vilka tal ryms inom talet 5?".

En lärare arbetade med relationer inom talet 5 tillsammans med sina elever. Inledningsvis berättade läraren för eleverna att de skulle få lära sig om femkompisar och började med att fråga om eleverna vet vad femkompisar skulle kunna vara för något.

> Elev 1: Om man säger att man har fyra och då behöver man mer för att det ska vara fem.
> Läraren: Just det. Femkompisar är olika sätt att bilda talet fem. Man kan få fem på olika sätt. Om jag har fyra i den här handen (visar fyra små kuber), hur många ska jag då ha i min andra hand för att det ska vara fem tillsammans?
> Elev 2: En!
> Läraren: Just det! (Läraren visar sina båda händer där hon har fyra kuber i den ena och en kub i den andra).
> Läraren: Fyra och ett (byter plats på kuberna i sina händer) eller ett och fyra är fem tillsammans.

Efter denna inledning får eleverna bilda femkompisar tillsammans i par. Varje elev får ett bestämt antal kuber i samma färg av läraren som de ska gömma i sina händer (1–5 stycken). När alla elever har fått sina kuber får de kika för att se hur många de har och sedan ber läraren dem att försöka hitta sin femkompis. Läraren säger också att det är viktigt att femkompisens kuber har en annan färg än de som eleven själv håller i handen. Eleverna börjar gå runt i rummet för att hitta sin femkompis.

> Elev 1: Jag har tre.
> Elev 2: Jag har också tre.
> Elev 1: Å, det är ju sex.
> Eleverna fortsätter att leta efter sina femkompisar.

En annan elev konstaterar att hon redan har fem kuber i sin hand och berättar detta för läraren.

> Läraren: Just det. Vem behöver du hitta då?
> Eleven: Noll.
> Läraren: Ja, och det är ju jag som har noll. Fem och noll är ju fem.

När alla elever hittat sin femkompis så använder läraren elevernas kuber för att visa på relationer inom talet fem. Läraren låter varje elevpar presentera sin talkombination av talet 5 både med kuber och beskriva relationen med ord. Efter denna övning får eleverna arbeta med en annan aktivitet som handlar om femkompisar där en elev visar ett antal kuber och kompisen får säga hur många som ligger kvar i muggen om summan ska vara fem. Efter en liten stund samlar läraren eleverna i en ring på golvet och frågar dem på hur många sätt man kan dela talet fem egentligen och om de har hittat alla sätt under lektionen idag. Läraren tar fram kuberna på nytt och tillsammans tar de reda på hur många talkombinationer som finns för talet fem.

> Läraren: Vi börjar med fem och noll. Det är ju fem (lägger en rad med fem kuber på golvet)
> Och om vi har fyra (lägger en rad med fyra kuber på golvet)?
> Elev: En till.
> Läraren: Ja! Fyra och ett är fem tillsammans. Det är en femkompis! Hur kan vi mer få talet fem?

Läraren och eleverna arbetar vidare och efter en stund har de hittat alla de sex talkombinationerna som finns för talet 5 (se bild 6). I exemplet arbetar läraren med relationer *inom* tal. Läraren tar utgångpunkt i talet 5 (helheten) och delar upp helheten i mindre delar. I undervisningen ges eleverna möjlighet att erfara hur talet 5 är sammansatt av delar, genom att i olika aktiviteter undersöka och omgruppera delar av fem. Femkompisar är temat som knyter ihop det de arbetar med och belyser talet som en del-del-helhets-relation. I slutet av lektionen är läraren noga med att visualisera alla de additionskombinationer av naturliga tal som tillsammans kan bilda talet fem och visar dessa kombinationer med både konkreta material och verbala beskrivningar. Undervisningen om talrelationer blir på detta sätt utvecklande eftersom eleverna dels får undersöka variationen av sätt att kombinera tal som delar av en större helhet, dels synliggör läraren sambandet mellan talkombinationerna genom att sammanfatta och systematiskt synliggöra observationerna för eleverna.

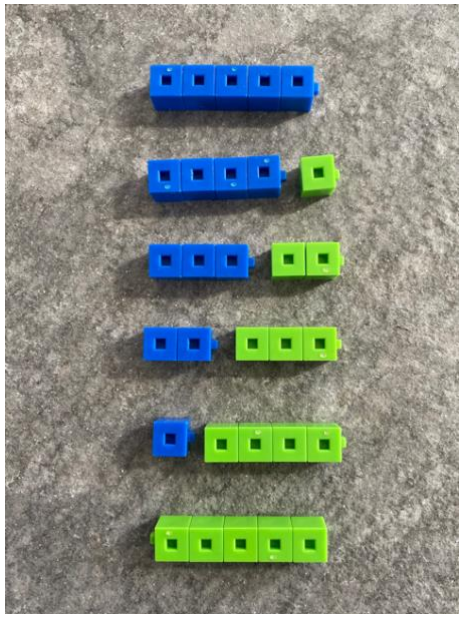

Bild 6. Talkombinationer för fem.

Vi kan också se tillbaka på exemplet där läraren lät eleverna visa olika antal med hjälp av sina fingrar när läraren sa ett räkneord mellan noll och tio. I den aktiviteten synliggjorde läraren också relationer inom tal vid ett par tillfällen. När läraren exempelvis bad eleverna att visa 8 med sina fingrar visade några elever 5 fingrar på ena handen och 3 fingrar på den andra medan andra elever visade 4 fingrar på ena handen och 4 fingrar på den andra handen vilket läraren lyfte fram och synliggjorde för eleverna i klassen, men inte systematiskt för alla talen, vilket hade vidgat möjligheten att uppmärksamma talrelationer som en generell egenskap ytterligare.

Relationer mellan tal

Relationer mellan tal handlar om hur tal förhåller sig till varandra. Till exempel att talet 1 kommer före talet 3 i talraden, att 5 är ett mer än 4 och två mindre än 7, eller att 5 björnar är hälften av 10 björnar. Att förstå relationer mellan tal förutsätter att eleven uppfattar både ordinalitet och kardinalitet hos tal. Att rikta uppmärksamhet mot relationer mellan tal är en viktig del i undervisningen om tals egenskaper och har observerats vid några tillfällen.

När lärarna arbetar med relationer mellan tal tillsammans med sina elever kan det exempelvis handla om att jämföra tal (udda/jämnt, större än/mindre än, fler/färre), att utforska begreppen dubbelt/hälften eller att ordna tal i en korrekt ordningsföljd i en talrad.

En lärare arbetar med begreppen fler och färre och synliggör relationer mellan tal med hjälp av en tallinje och legobitar. Läraren utgår från talet 5 och markerar talet med en magnet på tallinjen efter att hon räknat och hoppat fram på tallinjen från 0 till 5.

> Läraren: Det här är fem (läraren pekar på punkten för fem på tallinjen). En fler än fem, vad är det?
> Läraren ber en elev komma fram och visa. Eleven går fram och sätter en grön magnet vid markeringen för talet sex.
> Läraren: Just det. Fem och ett till, då är det sex. Kolla här.
> Läraren håller upp en stapel med fem röda legobitar.
> Läraren: Det här är fem.
> Hon sätter till en gul legobit överst i stapeln.

Läraren: Behöver vi räkna för att veta hur många det är nu?
Elev 1: Nej, sex.
Läraren: Hur visste du?
Elev 1: Fem först och sedan ett till.
Läraren: Fem och en fler är sex.
Läraren gör på samma sätt för att visa på fem och två fler.
Läraren: Om det ska vara en färre än fem? Var ska magneten sitta då?
Elev 2: Vid fyra.
Läraren: Ja. Men varför? En färre. Vad betyder det egentligen?
Elev 2: En mindre.
Läraren: Just det. Fem och en färre är fyra.

Läraren använder verbala uttryck som fler och färre för att signalera att det finns en ordning som bestäms av talens kardinala egenskaper, och en relation mellan talen som bestäms av deras position på tallinjen. Tillsammans undersöker lärare och elever dessutom hur stor skillnaden är mellan talen i och med att de inte bara pratar om en fler utan också två fler än fem. Uppmärksamheten riktas då mot relationen mellan tal som är nära varandra eller längre från varandra.

Ett flertal lärare använder en talrad för att synliggöra talens ordning (ordinalitet) och visualisera relationer mellan tal. Talraden illustreras då till exempel med hjälp av kort med siffersymboler eller med antalskort där varje kort visar ett specifikt antal. När talen ordnas på talraden så markeras talens storlek genom talradens riktning. Till vänster på talraden finns de lägre talen och till höger de högre talen. I flera av våra observationer har lärare arbetat med relationer mellan tal genom att använda kort med siffersymboler som eleverna fått i uppdrag att ordna i korrekt ordningsföljd från det minsta till det största talet genom att eleverna exempelvis får ställa sig på rad så att talföljden stämmer eller att lägga korten i följd på golvet. I följande exempel får eleverna ett uppdrag att lösa tillsammans där talens ordning är i fokus.

> Läraren berättar för eleverna att Nissen behöver deras hjälp med att ordna så att talraden blir rätt igen. Talen har hamnat i fel ordning och alla kort ligger i en hög. En elev säger att de ska börja med noll. Läraren svarar ”Ja! Jag delar ut kort till några av er så ska vi se om ni kan hjälpa Nissen att få talen i rätt ordning igen. Från noll till tio sa Nissen. Vilket är det minsta talet och vilket är det största talet? Ni som har de korten kan väl komma fram så vet vi var talraden ska börja och sluta. Då kan vi sedan fylla på med de tal som finns emellan”. De två elever som har korten med talet noll och talet 10 kommer fram och ställer sig vid tavlan. Läraren talar om var eleverna ska ställa sig för att markera början och slutet på talraden. Efter det får övriga elever som fått ett kort komma fram och tillsammans ordnar de en talrad från noll till tio. När eleverna står uppställda och håller i sitt kort frågar läraren de andra eleverna om det ser rätt ut. Efter det pekar läraren på ett tal i taget och eleverna hjälper till att ramsräkna både framåt (0–10) och bakåt (10–0) på talraden.

I detta exempel ligger fokus på att eleverna ska ordna talen 0–10 i en korrekt följd. Läraren är tydlig med att talraden ska ha en specifik riktning från det minsta talet (0) längst till vänster och det största talet (10) längst till höger. Lärarens ordval minsta-största gör att talraden får en mer nyanserad innebörd än att enbart ha en stabil ordning (se ovan om räkneordens struktur). I och med att talradens början och slut markeras ut tydliggörs också att det finns en relation mellan talen (lägre-högre) och att denna egenskap hos talen är central i uppgiften att hjälpa Nissen ordna upp talen.

En annan lärare visar en talrad från 0–20 på tavlan. Hon säger “Hokuspokus Filiokus” och med ett knapptryck försvinner sju tal från talraden. Eleverna får i uppdrag att försöka hjälpa till att trolla tillbaka talen som försvunnit.

Läraren: Om vi börjar här (läraren pekar på den tomma rutan längst till vänster på talraden)?
Elev 1: Noll.
Läraren: Noll, hur vet du det?
Elev 1: För att noll kommer innan ett som är där bredvid.
Läraren: Bra! Helt rätt (läraren klickar fram talet igen). Och här då (läraren pekar på en ny tom ruta på talraden)? Det är ett av de högre talen.
Elev 2: Tretton.
Läraren: Jag håller med. Men varför tretton?
Elev 2: För att tretton är mellan tolv och fjorton.
Läraren: Just det. Tretton är ett mer än tolv eller ett mindre än fjorton.

Läraren styr aktiviteten och när en elev ger ett förslag på vilket tal som saknas i den rutan som läraren pekar på så ber hon också eleven att motivera sitt svar vilket gör att relationerna till de närliggande talen uppmärksammas. Läraren förtydligar också elevernas svar, exempelvis genom att säga att tretton är ett mer än tolv eller ett mindre än fjorton samtidigt som hon pekar på talraden. Genom detta lyfter läraren alltså fram de kardinala aspekterna av de två näraliggande talen till talet tretton (ett mer och ett mindre än) med utgångpunkt i elevens svar att tretton är mellan tolv och fjorton.

Aritmetiska operationer

Det fjärde temat handlar om aritmetiska operationer. Vi har observerat undervisning där innehållet handlat om aritmetik, det vill säga operationer med antal där något händer, en kvantitet förändras genom att något läggs till (blir fler) eller tas bort (blir färre), eller där man jämför kvantiteter och ska ta reda på skillnaden (hur många fler eller färre). Det kan också handla om att en mängd delas och man ska ta reda på hur stort antal det blir i varje delmängd. Aritmetiska operationer innebär alltså att operera med tal för att lösa problem som uttrycks i numeriska termer, antingen i ord eller symboler. En god taluppfattning är därför en förutsättning för att elever ska lära sig lösa aritmetiska operationer.

En av de mest vanliga aritmetiska uppgifter som elever möter är uppgifter där två tal läggs ihop och bildar en större helhet, det vill säga addition. I sin enklaste form löser elever uppgiften genom att använda någon sorts materiel för att räkna fram delarna och föra samman dem (konkret göra en stor hög av två mindre högar) till en ny helhet som räknas samman. Strategin fungerar men är inte utvecklingsbar när antalet blir stort och det inte finns materiel tillgängligt att räkna med. Utmaningen i undervisningen är att ge eleverna stöd i att använda sina kunskaper om tal som sammansatta delar (se talrelationer ovan), eftersom det är ett sätt att närma sig problemlösningen som är gångbart också i större talområden och även i andra typer av uppgifter än addition. Metoder att använda för att generera lösningar i aritmetisk problemlösning är därför centralt för en utvecklande undervisning.

En lärare använde sig av två sexsidiga tärningar och lät sina elever öva sig i att känna igen tärningsmönster och att addera antalet prickar som de två tärningarna visade. Läraren satte genom sitt handlande i aktiviteten upp ramar för hur uppgiften kunde lösas, bland annat genom att täcka över antalet prickar på ena tärningen och uppmuntra eleven att föreställa sig den första addenden (delen) som ett tal. På så sätt fick eleven en utmaning i att pröva metoden “räkna vidare” som är mer användbar och generaliserbar än att räkna alla enskilda prickar på tärningarna. Om en elev exempelvis slagit 3 och 5 så täckte läraren tärningen som visade 5 med sina händer och sa “Här är fem, och så tre till, hur många är det tillsammans?”. Sambandet mellan uppräkning för att bestämma ett antal, och addition som en summa av två tal (sammansatta delar), uppmärksammas genom att läraren uppmanar eleven att räkna vidare från det största talet och genom att ställa frågan “Hur många?”. Även om de inte kan se och räkna prickarna så är talet (det sagda räkneordet) en representation för det antalet. Vidare leder läraren eleverna till att “se” talet i relation till andra tal när de uppmanas räkna vidare från det första (och största) talet.

Läraren hade ställt fram stolar numrerade från 2 till 12 i en halvcirkel. När eleverna gett sitt svar på additionen sätter de sig på den stol som hade det tal som motsvarade summan av prickarna på de två tärningarna. Om stolen redan var upptagen fick eleven säga "stick" till sin kompis som då fick resa sig och ställde sig i ledet för att invänta sin tur på nytt. En bit in i aktiviteten uppmärksammade eleverna att vissa stolar var upptagna ofta medan andra stolar ännu var tomma. Läraren pausade då aktiviteten och tillsammans med eleverna resonerade de kring hur det kunde komma sig. De undersökte på hur många sätt man kan få summan 2, 3, 9 eller 12 (de stolar som ännu var tomma) när man slår två sexsidiga tärningar (se bild 7). Här berörs både relationer inom tal (på hur många sätt kan exempelvis summan bli 2) och relationer mellan tal (kan exempelvis summan 9 bildas på fler sätt än summan 3). Resonemanget om relationer inom och mellan tal är ett stöd för eleverna att förstå resultatet av additionerna som de kunde se framför sig där vissa stolar ännu var tomma medan andra stolar ofta var upptagna.

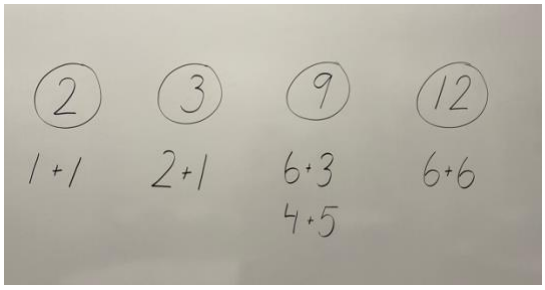

Bild 7. Olika sätt man kan få summan 2, 3, 9 och 12 när man adderar antalet prickar på två tärningar.

Att arbeta med aritmetiska operationer inbäddade i räknesagor och kontextuppgifter är också en del i matematikundervisningen i förskoleklassen. I några av de observationer som vi gjort har räknesättet (addition eller subtraktion) varit givet i räknesagor eller kontextuppgifter som läraren presenterat för sina elever, det vill säga uppgifterna har handlat om att "lägga till" eller ta reda på hur mycket något är "tillsammans", eller att något "försvinner" eller "tas bort", vilket ger ledtrådar till hur uppgiften kan lösas. I de flesta fall uppmanas eleverna att komma fram till ett svar som de kan presentera verbalt eller skriftligt i form av exempelvis en ritad bild, men också som ett additions- eller subtraktions-uttryck.

I en annan observation visar läraren en hage med två djur, en häst och en ko, och frågar eleverna hur många ben det finns i hagen. En elev svarar "åtta" med motiveringen att "fyra plus fyra är åtta". Läraren skriver ner uttrycket 4+4=8 på tavlan. Fler elever får sedan beskriva hur de tänkte när de tog reda på antalet ben i hagen. Efter detta placerar läraren en höna i hagen och frågar på nytt eleverna hur många ben det finns i hagen. Läraren är noga med att påtala att eleverna kan använda information som de redan har för att lösa uppgiften. De vet ju sedan tidigare att fyra ben (en häst) och fyra ben (en ko) är åtta ben tillsammans och att de nu ska lägga till två ben (en höna). Eleverna arbetar sedan i mindre grupper med uppgifter där fler djur placeras i hagen och de ska ta reda på summan av antalet ben. Vid återsamlingen är det fokus på att eleverna ska berätta hur de gjorde när de räknade ut det sammanlagda antalet ben, det vill säga den aritmetiska operation som eleverna utförde för att komma fram till summan.

Vi har också sett exempel på undervisning där läraren använt sig av räknesagor eller kontextuppgifter där räknesättet för att lösa uppgiften *inte* har varit givet i uppgiften och där uppgiften i stället öppnat upp för flera möjliga lösningsvägar och svar. Nedan följer ett exempel på en aritmetikuppgift som också handlar om djurben men där uppgiftens utformning gör det möjligt för eleverna att ta sig an uppgiften på olika sätt för att försöka hitta ett (eller flera) lösningsförslag.

> Läraren samlar eleverna och berättar för dem att han sett djur i en hage när han åkte till skolan på morgonen. Läraren tar fram en ask med stickor och säger att det är djurens ben som finns i asken. Eleverna får kika i asken, sedan frågar läraren vilka djur det kan ha varit som han såg i hagen. Eleverna ger flera olika förslag och läraren frågar varje gång hur många ben respektive djur har. Eleverna delas sedan in i mindre grupper och varje grupp får en ask med trästickor (12, 14 eller 16 stycken) som ska symbolisera djurben och får i uppdrag att fundera ut vilka djur det skulle

kunna ha varit i hagen. Eleverna använder stickorna och ritar bilder för att hitta lösningar till uppgiften.

Elev 1: Vi har en myra och en elefant.
Läraren: Hur många ben hade ni i asken?
Elev 2: Fjorton.
Läraren: Har ni gjort åt alla?
Elev 1: Vi har gjort sex ben på myran och fyra på elefanten (eleven räknar upp sju, åtta, nio, tio för att komma fram till summan).
Läraren: Vi tar bort tio av benen. Hur många är kvar?
Elev 2: Fyra (lägger fram stickorna).
Läraren: Vilka djur räcker det till?
Elev 2: Vi vill ha en hund.

I denna situation utgår läraren från en problemställning (vilka tal kan tillsammans bilda ett givet större tal). Eleverna får ett bestämt antal ben att utgå från och ska tillsammans hitta ett förslag på vilka djur det skulle ha kunnat vara i hagen. Uppgiftens utformning gör det möjligt för eleverna använda olika metoder för att hitta en lösning. De kan till exempel börja med att bestämma djursort och addera ben tills de har kommit upp till det antal ben de fick i uppgiften, eller utgå från stickorna (helheten) och göra grupper av dem och se vilka alternativ som är möjliga. Båda metoderna kommer att leda till att problemet kan lösas. Den första metoden sätter dock ”djuren” i förgrunden och leder till metoden försök-och-misstag för att hitta lämpliga djurtyper att addera, medan den senare sätter ett matematiskt resonemang i förgrunden (hur kan talet delas upp). Problemlösningen och elevernas lösningsförslag, det vill säga inte bara svaret utan resonemanget som leder fram till svaret, kan på så sätt ge ett gott underlag för att diskutera och undersöka talrelationer och kopplingen till aritmetiska operationer och i synnerhet vilka metoder som är lämpliga för att lösa problemet.

Sammanfattning

Observationerna visar att de avgränsade innehåll om tal, tals egenskaper och användning i problemlösning som behandlas i undervisningen kan samlas inom fyra teman: Tals innebörd och struktur, representationer av tal, talrelationer, samt aritmetiska operationer. Inom dessa behandlas särskilt kardinalitet och ordinalitet samt talrelationer inom och mellan tal som grundläggande egenskaper hos tal, vilket vidare kan bearbetas i användning i problemlösning. Representationer av tal blir i sammanhanget betydelsefullt både som mål (att tal kan representeras på olika sätt) och medel (talrepresentationer konkretiserar talrelationer som behandlas). Representationer av tal och tals innebörd (särskilt kardinalitet – “hur många?”) är vanligt innehåll i undervisningen. Den sammantagna bilden visar att undervisningen ofta behandlar relevanta innehåll som har potential att bidra till en god taluppfattning hos eleverna, även om observationerna också visar att matematik-undervisningen i många fall främst bekräftar vad eleverna redan kan och riskerar att begränsa matematiklärande till färdighetsträning. Utmaningen i att genomföra undervisning som *utvecklar* elevers taluppfattning tycks ligga i att synliggöra nödvändiga samband mellan till exempel representationer (bland annat i räkneord och siffersymboler) och tals innebörd och struktur, samt hur tal kan användas i problemlösning där resonemanget som ligger bakom användningen av tal och aritmetiska operationer behöver synliggöras för eleverna.

Hur innehållet behandlas

I undervisningen är avgränsningen av innehållet centralt – vad ska eleverna ges möjlighet att utveckla sitt kunnande om – men lika viktigt är på vilket sätt det avgränsade innehållet görs synligt och begripligt för eleverna. I kartläggningen ligger stort fokus på detta, hur läraren i undervisningen gör det möjligt för eleverna att utveckla sin förståelse för tals egenskaper och användning. I texten nedan beskriver vi vilka material (artefakter) och notationer som används i undervisningen och särskilt *hur* dessa används. Därefter fördjupar vi diskussionen om hur metoder för att generera och värdera svar på uppgifter hanteras i undervisningen, liksom matematiska samband. Den undervisning vi observerat bygger i hög grad på interaktion mellan lärare och elever, därför problematiserar vi också hur elevsvar tas tillvara i undervisningen.

Vilka material används och hur?

I kartläggningen ser vi att många material återkommer i flera klassrum och används i många fall på ett utvecklande sätt där matematiska objekt och samband synliggörs (se översikt sidan 8). Vi har särskilt fäst uppmärksamhet vid på vilket sätt materialen används. Det vill säga, på vilket sätt görs de till redskap i undervisningen för att eleverna bättre ska förstå matematiken? När innehållet för lärande handlar om tal, tals egenskaper och användning i problemlösning kan materialen syfta till att representera antal eller illustrera samband inom eller mellan tal. MPM-verktyget har hjälpt oss få syn på hur materialen används med avseende på om de är strukturerade eller ostrukturerade, och om de används på ett strukturerat eller ostrukturerat sätt i undervisningen.

I vetenskaplig litteratur brukar material benämnas som artefakter. En artefakt är objekt som finns tillgängliga eller skapas för ett visst ändamål. Vad artefakten får för mening, ligger inte i objekten själva utan i hur de tolkas och används. Det betyder att en artefakt inte har en förbestämd användning utan det är undervisningen och lärarens användning av artefakten som förmedlar en innebörd. Artefakter kan vara mycket konkreta som en penna, vars mening framträder när den används för att skriva med, samtidigt som pennan också kan användas som trumpinne och får då en annan mening, även om objektet är detsamma. Artefakter kan också vara mer abstrakta som symboler, vars mening förmedlas i kommunikation med andra till exempel siffersymboler som inte i sig själva betyder ett antal men vi lär oss av andra att en viss siffra kan tolkas som ett exakt antal eller en ordning. I undervisning får det därför betydelse hur något används, för den mening som artefakten förmedlar till eleverna.

Olika typer av inramning

Vissa material är valda för att ge en inramning till en aktivitet, till exempel ett hjul med siffror att snurra på för att få fram ett slumpvis tal. Hjulet förmedlar i det fallet ingen matematisk innebörd. Siffersymbolen som hjulet stannar på kan däremot ses som en artefakt som förmedlar till exempel ett antal hopp eller handklapp, det vill säga symbolen blir en artefakt som i det sammanhanget förmedlar ett antal rörelser som eleven ska göra i aktiviteten. Hjulet skulle kunna bytas ut mot en hatt ur vilken man drar ett sifferkort i blindo för att på så sätt få samma resultat, nämligen ett slumpmässigt valt tal. På samma sätt kan ett par stövlar ses som en inramning och riktning för vad som förväntas göras i en aktivitet, men som inte helt enkelt kan ses förmedla en matematisk innebörd av något slag, det vanligaste är ju att man använder stövlar för att inte bli blöt om fötterna. Om stövlarna däremot används för att skilja ut två delmängder att dela upp ett antal föremål i, blir innebörden av dem en annan, från att vara ett par stövlar till att betyda avgränsade delmängder som underlättar att till exempel se hur fem kan delas upp på olika sätt (se bild 8).

Bild 8. Stövlar som inramning för en delningsaktivitet.

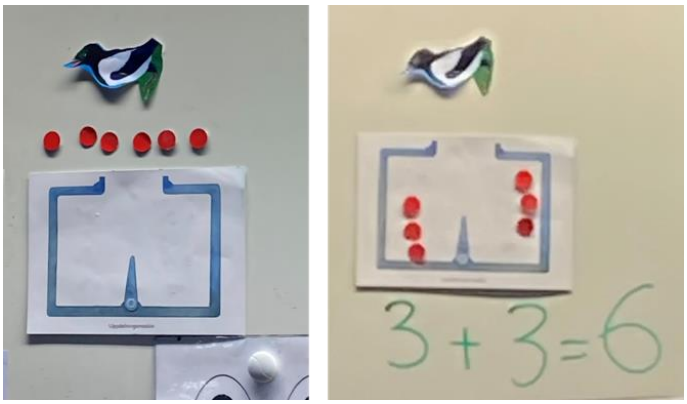

Bild 9. Delningsmaskin.

I många klassrum har vi sett varianter av en “delningsmaskin” (se bild 9), det vill säga en låda eller ram i vilken en vägg eller avgränsning gör att föremål som hamnar inuti maskinen (som ramar in hela antalet) delas upp i två delmängder så att eleven synligt kan se uppdelningen samtidigt som delmängderna ramas in som en helhet i “maskinen”. Maskinen är däremot främst en inramning för en aktivitet där till exempel en systematisk översyn av vilka uppdelningar ett och samma tal kan ha måste uppmärksammas och systematiseras för att talet och dess delar ska framträda tydligt för eleverna.

Även om inramningen av en aktivitet inte är det primära innehållet som eleven ska lära sig, ser vi att det är nödvändigt att välja material med omsorg. Illa valda material kan dra uppmärksamheten från det tänkta lärandet och skapa frustration. Ett spel med en tärning där eleverna ska hitta och markera motsvarande siffersymbol på en platta med siffrorna 1–6 fungerar bra, men när läraren erbjuder eleverna som snabbt spelat klart en “svårare” variant med en platta med talen 1–12 att spelas med två tärningar kan man förutse att frustration hos eleverna kan uppstå: Summan av antalet prickar på två tärningar kan inte ge summan 1 och därmed kan rutan med “1” aldrig markeras. Å andra sidan, om en elev, eller lärare, uppmärksammar detta kan det leda till intressanta och utvecklande diskussioner om talkombinationer. Läraren bör dock vara medveten om begränsningarna som materialet för med sig och vara beredd på att lyfta detta till en utvecklande diskussion.

Vissa material är å andra sidan speciellt utformade för att underlätta för eleven att sortera större kvantiteter så att de blir överskådliga och eleven inte behöver räkna varje föremål för att “se” hur många det är. Sådana material är ordnade i rader, till exempel så att fem enheter grupperas och när fler antal läggs till bygger det på med en ny rad eller på annat sätt markerar att fem “hör ihop”. Motsvarande “tioramar” förekommer också och varianter av ramar som i och med sin strukturerade utformning gör att de förmedlar en mening av “grupper” eller samlingar av enheter. Det här underlättar för eleven att uppfatta antal som sammansatta och kan bilda grund för att visa hur tiobassystemet är uppbyggt i ental och tiotal. Sådana artefakter kan alltså bidra till att synliggöra talrelationer, om de används på ett strukturerat sätt. Se till exempel på de två tioramarna på bild 10. I den vänstra är hålen fyllda slumpvis eller osystematiskt, vilket gör det svårt att få en bild av hur många röda knappar som fyller hålen. I den högra är det däremot lättare att se antalet röda knappar i och med att ramen har fyllts ut systematiskt, först hela övre raden “fem” och sen fortsatt på den nedre “en till”. Den övre raden bildar en sammansatt del, som med lite erfarenhet inte behöver räknas fram utan eleven “vet” att en fylld rad är fem. Om artefakten används på ett sådant strukturerat sätt så bidrar den till att synliggöra tal som sammansatta: “fem och en är sex tillsammans”.

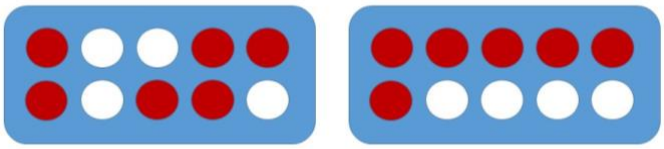

Bild 10. Illustration av tioramar.

Följande material eller artefakter har vi sett användas i förskoleklassernas undervisning om tal och tals användning vid våra observationer:

Plockmaterial – kan bestå av i princip vilka föremål som helst, men är ofta små och många. Ofta väljs de ut med någon gemensam egenskap som gör att de "hör ihop" med varandra, till exempel stenar, pärlor, klossar, kottar, plastnallar, makaroner eller fruktfigurer. Plockmaterial eller bilder av motsvarande föremål (små och många) används i nästan alla undervisningssituationer som vi observerat.

Pärlband – består av pärlor som är uppträdda på exempelvis ett band eller en piprensare. Pärlorna kan visserligen ses som små och många föremål, likt plockmaterialen ovan, men när de träs upp på ett band finns större möjligheter att överblicka antalet och att strukturera dessa på olika sätt, exempelvis fem och fem i två olika färger.

Ramar – fasta material utformade så att enheter visuellt kan urskiljas, ofta i rader med två, fem eller tio parallella enheter. Bild 10 ovan visar ett exempel på en ram, mer specifikt en tioram där tio enheter är ordnade i två rader om fem.

Fingrar – fingrar kan ha flera funktioner i matematiska sammanhang. Dels kan fingrar fungera som markörer för att hålla ordning på hur många saker man räknat fram, till exempel hur många dagar det är kvar av veckans dagar till lördag där många viker fram ett finger för varje veckodag man säger fram till lördag och ser på fingrarna hur många dagar det var. Dels kan fingrar representera antal som ett fingertal "hela handen är fem" där eleven alltså inte räknar fram fem stycken utan hela handen betyder antalet fem och två fingrar till på andra handen ses direkt som fingertalet sju, utan att de heller behöver räknas fram. Det senare är en stor hjälp för att relatera delar till en helhet där till exempel eleven vet att det är tio fingrar på båda händerna tillsammans och om en del är sju måste den andra delen vara tre, vilket eleven direkt kan "se" på sina fingrar.

Tärning – tärningen känner de flesta elever igen från brädspel eller andra spel där slumpen ska avgöra ett antal av något. På liknande sätt som fingrarna kan tärningens prickar räknas en och en för att bestämma hur många de är, men det mönster som prickarna är ordnade i hjälper eleven att uppfatta antalet också utan att behöva räkna och eleven känner istället igen mönstret som exempelvis "en tärningsfemma". Prickarna är på så sätt strukturerade så att de bildar en helhet man lätt känner igen som ett specifikt antal. Det betyder däremot inte att "tärningsfemman" betyder detsamma som att talet fem kan delas upp i mindre tal och sättas samman på olika sätt, men att undersöka tärningens mönster som sammansatta tal kan bidra till en sådan förståelse för tals del-helhets-relation.

Antalskort – i syfte att visa antal används grupperade föremål (se plockmaterial ovan) men det förekommer inte bara som konkreta fysiska föremål utan också i form av bilder på kort. Det som skiljer antal representerade i bilder från plockmaterial är den statiska presentationen, det är inte möjligt att ordna och omgruppera objekten på antalskorten. Om objekten inte redan är ordnade på ett systematiskt sätt kan det vara nödvändigt att räkna dem, en och en för att ta reda på antalet (se bild 11). Däremot ser vi flera tillfällen där spelkort (ej klädda kort) används för att visa på antal där samma ordnade mönster av färgerna (hjärter, ruter, spader eller klöver) kan kännas igen även om figurerna

på två kort är olika. Det finns alltså påtagliga likheter med tärningen där mönstret ger stöd för att urskilja antal.

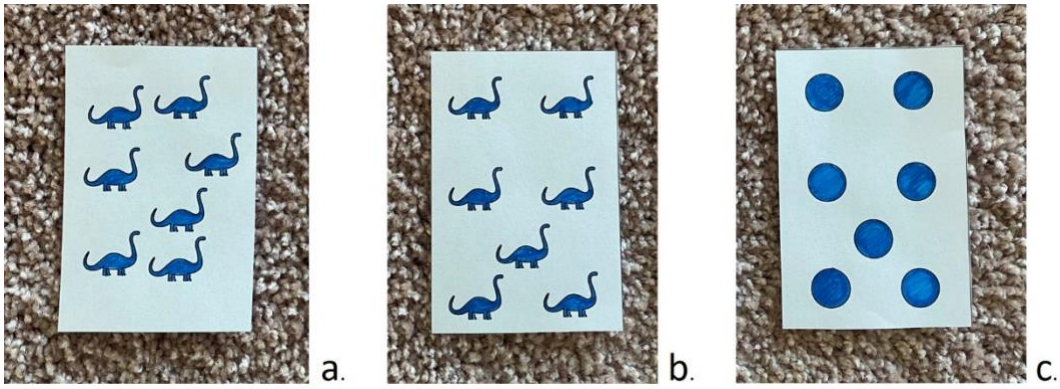

Bild 11. Antalskort med bilder som inte är ordnade (ostrukturerade, a.) och som är ordnade (strukturerade, b. och c.).

Siffersymboler – kort med siffersymboler. Används ofta som modell för hur antal representeras skrivet med siffror samt ordnade i en talrad där det minsta talet finns längst till vänster och det största talet längst till höger (se bild 12).

Talrad och tallinje – olika varianter av talrader och tallinjer används för att visualisera tals inbördes ordning (ordinalitet) och/eller deras storleksförhållanden där stöd tas i den linjära representationen. Genom att använda en talrad och/eller en tallinje finns möjlighet att arbeta med begrepp som är kopplade både till tals ordinalitet och till deras storleksförhållanden. En talrad är en visuell modell av icke-negativa tal (0, 1, 2, ...) där talen har en bestämd ordning och där talens storlek markeras genom talradens riktning (se bild 12). I många språkliga uttryck blir det tydligt att talen på talraden har en given ordning kopplat till avstånd; *Vilket tal kommer före 3? Vilka tal är grannar med talet 7?, Vilket tal är närmast 4, 1 eller 6?*. I och med att talen ordnas från det minsta talet till vänster och det största talet till höger framträder ett storleksförhållande mellan talen. En tallinje är å sin sida uppbyggd på ett sådant sätt att talen uttrycks som punkter och sträckor eller längder (se bild 13). Den sträcka som finns mellan två på varandra följande heltal är alltid lika stor. Exempelvis så är sträckan mellan talen 0–1 lika stor som sträckan mellan talen 6–7 på samma tallinje. När tallinjen används för att mäta och räkna så är det antalet mellanrum mellan punkterna för två tal som vi räknar, inte själva punkterna. På en tallinje ryms inte enbart icke-negativa tal, utan det är möjligt att representera alla tänkbara tal på tallinjen, så som exempelvis –8, 1,5, 2/3 och π.

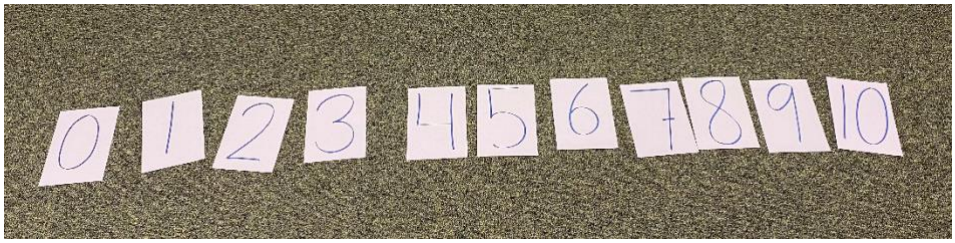

Bild 12. Talrad av sifferkort 0–10.

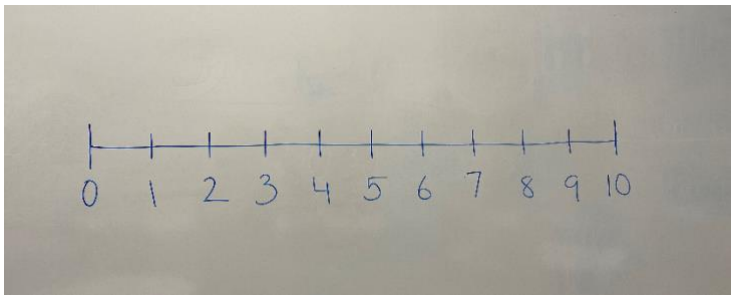

Bild 13. Tallinje från 0–10.

Strukturerade och ostrukturerade artefakter

Vissa artefakter är utformade så att de lätt uppfattas som strukturerade, ett exempel är tioramen. Andra material som pärlor är ostrukturerade så länge de ligger i en hög, men ordnade på ett pärlband i grupper om fem och fem i olika färger anses det vara en strukturerad artefakt eftersom dess utformning skapar synliga femgrupper och tiogrupper. Valet av artefakt (strukturerad eller ostrukturerad) kan göra stor skillnad för elevers möjligheter att resonera om tal, särskilt om tal som sammansatta delar (se antalskorten på bild 11).

I flera klassrum ser vi att lärare medvetet väljer att strukturera plockmaterial så att det för eleverna synliggörs hur flera pärlor grupperas till en enhet. Till exempel tio pärlor på en piprensare som bildar ett tiotal, sen fortsätter man lägga pärlor på en ny piprensare tills det är tio pärlor på den nya tråden. Genom att gruppera enheter om tio, öppnar sig möjligheten att se den struktur som tiotal (och hundratal) bygger på. I flera förskoleklasser har vi observerat att man räknar dagar och har siktet inställt på hundra. Hundra dagar är en lång tid för 6-åringen och det är svårt att få grepp om *hur* länge det är om man inte strukturerar dagar i till exempel tiotal, i veckor eller månader. Valet av material, såsom färgen och storleken på pärlorna, gör däremot skillnad för hur lätt eller svårt det är att urskilja den sammansatta enheten. Att välja skoldagar i en färg och helgdagar i en annan färg kan tjäna ett syfte när man till exempel lägger till dagar även när man varit ledig från skolan, men om avsikten är att jämföra antal veckor så vinner man på att välja identiska pärlor för en sammanhållen vecka som då representerar veckans alla dagar, för att det också visuellt ska bli lätt att se sju dagar på ett snöre som en vecka (sammansatt av sju dagar).

Att använda artefakter på strukturerat eller ostrukturerat sätt

I förskoleklasserna använder man ofta sifferkort, ibland för att skapa en talrad (se bild 12) men också för att knyta samman med antal eller räkneord. När sifferkorten används som självständiga artefakter, till exempel att de dras i slumpmässig ordning ur en hög ett åt gången och förpassas till en skräphög när nästa kort dras, är de ostrukturerade artefakter. Ibland är det just siffersymbolen man vill uppmärksamma och då kanske inte relationen till andra siffersymboler är i fokus. Vi ser flera exempel i undervisningen där eleverna ska para ihop sifferkort med det antal som siffran/siffrorna representerar. Det blir då en uppgift som går ut på att tolka vad siffran/siffrorna betyder och visa motsvarande antal med någon sorts föremål (kardinalitet), vanligen inramad i en aktivitet där eleverna till exempel ska "hämta skatter". Vi vill problematisera den aktiviteten och visa på att ostrukturerade artefakter kan användas på ett strukturerat sätt och på så vis bidra till att utveckla elevernas taluppfattning. Den mest vanliga lösning på skattjaktsuppgiften vi sett är att eleverna hämtar en samling föremål, räknar upp dem och kontrollerar på så sätt att det är det antal som siffersymbolen representerar. Artefakterna är då ostrukturerade och används på ett ostrukturerat sätt. För många 6-åringar är det knappast någon större utmaning att hämta ett givet antal föremål. Däremot är det inte lika självklart att eleverna uppfattar hur tal sätts samman. Genom att närmare studera hur föremålen de hämtar utgör delmängder, till exempel "du hittade två blå, två röda och en gul sak, tillsammans fem saker" samtidigt som

de blå sakerna läggs som par intill varandra, följt av det röda paret och den ensamma gula, skapas en struktur där det är möjligt att se delar och helheten samtidigt. Den *ostrukturerade artefakten används då på ett strukturerat sätt* vilket öppnar upp för möjligheten att utveckla taluppfattningen.

Vi har observerat ett flertal undervisningsaktiviteter där målet är att sortera och att resonera om hur sorteringen görs. Sortering är ett sätt att rikta uppmärksamheten på hur mängder kan skapas, där vissa egenskaper hos föremål gör att de hör ihop. Kritiskt för att sorteringen ska utveckla elevernas matematiska förmågor är att sorteringen av samma föremål kan ta olika riktning och den färdiga sorteringen kan utgå från färg likväl som form eller någon annan egenskap. Vi vill dock rikta uppmärksamheten mot att sortering inte självklart leder till vidgad kunskap om tals egenskaper och användning, det behöver pekas ut för eleverna. Visserligen är förutsättningen för att resonera om tal att man först avgränsar vad som utgör en avgränsad mängd. Men den mängden erfars inte som en kvantitet (som kan räknas) om den inte jämförs med en annan mängd (annan kvantitet).

När vi söker efter sätt att använda artefakter på ett strukturerat sätt för att synliggöra innebörden av tal är sortering bara början. En korg med kottar från olika träd och i olika storlek sorterades i en klass så att kottar från samma slags träd först valdes ut. Det blev högar med tallkottar, grankottar, men också små alkottar. Läraren frågade hur de skulle kunna veta vilken sort det fanns flest av. Det läraren egentligen frågar efter är en metod för att strukturera de stora mängderna så att de blir jämförbara. Eleverna kom med olika förslag, någon tyckte de skulle ordna dem i långa rader, vilket de gjorde. Då upptäcker en elev att kottarna ju är i olika storlek och de inte kan vara helt säkra på att den längsta raden faktiskt har flest kottar. Läraren fångar upp upptäckten och frågar efter andra sätt att ordna kottarna så att de ska kunna jämföra *antalet*. En annan elev föreslår att de kan lägga kottarna i par, det vill säga dubbla rader. Det visar sig att det fortfarande är svårt att se vilken sorts kottar som är flest. Läraren skulle här kunnat utveckla förslagen och poängtera att längden på raderna inte är jämförbara eftersom kottarna är i olika storlek. Om man fokuserar antalet däremot, spelar ju storleken ingen roll. Men hur ska man orka räkna så många kottar och alla elever är kanske inte säkra på att räkna när det går över 20, 30 och 40 i antal? Det behövs inte, om man ordnar dem i till exempel tiorader, det vill säga *strukturerar ostrukturerade artefakter* så att deras antal blir överskådligt. Att skapa rader med tio kottar är genomförbart för de allra flesta elever, man behöver bara räkna tio kottar och sen göra en ny rad med tio strax under. Och flest kottar kan då urskiljas i och med att man dels väljer att fokusera antal (eftersom olika storlek gjorde en direkt jämförelse av längd på rad osäker), dels strukturerar föremålen så att antalet blir överskådligt, utan att man behöver räkna alla enskilda kottar.

En artefakt kan mycket väl vara *utformad på ett strukturerat sätt men användas ostrukturerat* och då utnyttjas förstås inte artefaktens fulla potential. Ett pärlband med fem pärlor i en färg följt av fem pärlor i en annan färg har potential att visa på fem-grupper och tio-grupper som gör att man inte behöver räkna pärlor en och en utan kan göra "fem-skutt" eller "tio-skutt" (se bild 14). Men räknas pärlorna en och en på samma sätt som man räknar upp veckodagarna på fingrarna så spelar inte färgen på pärlorna någon roll, femgrupperna lyfts inte fram och artefakten får innebörden av ett redskap för att hålla ordning på hur många man räknat upp – strukturen försvinner.

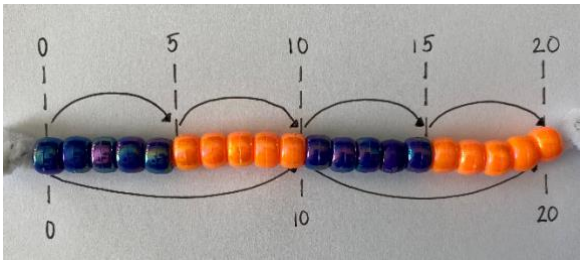

Bild 14. Fem- och tiogrupper på ett pärlband.

Det förekommer många *strukturerade artefakter* i den tidiga matematikundervisningen och vi kan se att de används flitigt också i de klassrum vi besökt, ofta på *strukturerat sätt*, vilket vi tolkar ger eleverna goda möjligheter att utveckla sin förståelse för tal och hur tal kan användas. En sådan artefakt är talblock som består av brickor med hål som bildar par. Materialet är på så sätt strukturerat i sin utformning, vilket öppnar upp för många sätt att undersöka och använda tal. Brickorna kan visserligen också användas till exempel så att varje hål fylls upp med en knapp tills en bricka är full och räkna hur många knappar det blev en-och-en. Artefakten används då på ett ostrukturerat sätt. Om man däremot utnyttjar artefaktens inbyggda struktur på ett strukturerat sätt har vi sett att det öppnar sig många möjligheter att utforska tal och samband inom och mellan tal:

På bild 15 har läraren ordnat brickorna så att de dels åtskiljs som udda (övre raden) och jämna (nedre raden) tal, dels finns en succession eller serie i antalet hål som görs överskådligt i och med att brickorna ligger samtidigt på bordet och därför kan jämföras med varandra. Läraren uppmuntrar eleverna att undersöka egenskapen udda och jämn hos tal genom att systematiskt jämföra antalet hål i brickorna på flera sätt:

> Elevernas ombeds känna på talblocken och säga om de är udda eller jämna. Utöver att känna, föreslår läraren att eleven ska kroka fingrarna i hålen för att jämföra antalen.
> Läraren: Kan det vara ett udda tal?
> Elev 1: Nej … jag har tre och du får tre (eleven tar upp talblocket sex).
> Läraren krokar i tre hål på ena sidan och eleven tre hål på sin sida.
> Läraren byter till talblock sju och uppmanar en annan elev att känna på talblocket.
> Läraren: Hur kan man känna om det är ett udda eller jämnt tal?
> Elev 2: Den har ingen kompis.
> Läraren: Vi kollar om vi kan … (krokar i med fingrarna igen). Får vi lika?
> Elev 2: Jag får tre och du får fyra.

Bild 15. Talblock ordnade i serier.

Fingrarna fungerar som en referenspunkt för att jämföra antalet hål, där den sinnliga upplevelsen av fingrarna i hålen är en lika tydlig, eller ännu tydligare indikator än att räkna antal. Jämförelsen med fingrarna "jag har tre och du har tre" visualiserar om det blir någon del över "den har ingen kompis" eller om hålen fylls ut. Begreppsparen udda-jämn blir på så sätt med stöd av den strukturerade artefakten synliggjorda och möjliga att undersöka.

Artefakter kan i princip bestå av vilka material som helst. Det som avgör om undervisningen blir utvecklande är på vilket sätt artefakterna används. När artefakter används på ett strukturerat sätt öppnar sig nämligen möjligheter för eleverna att upptäcka samband och egenskaper hos tal (till exempel udda-jämn eller fem- och tio-enheter) som stödjer elevernas utveckling av sin taluppfattning. Artefakterna kan även fungera som stöd för aritmetiska operationer när de används för att systematisera en undersökning såsom med kottarna, men förutsätter då att eleverna redan har en grundläggande förståelse för tal som sammansatta helheter.

Notationer

Observationerna visar att notationer ganska sällan används i undervisningen och när läraren gör notationer är det oftast för att presentera en uppgift eller bekräfta svar (se översikt på sidan 9). Notationer har dock en stor potential för undervisningen i och med den öppenhet för spontana uttryck och representationer (siffersymboler, ritade figurer eller grupperade streck) som de för med sig.

I de klassrum vi besökt finns vanligtvis en tavla av något slag som kan skrivas på med penna eller digitalt. Några undantag återfinns när matematikundervisningen hålls i en idrottshall, men till och med i en observation ute i skogen har läraren tagit med sig små tavlor att skriva på. Hur används då notationerna och hur kan dessa bidra till elevernas lärande om tal? I våra observationer har vi tagit fasta på enbart lärarens notationer. Det finns flertalet exempel där eleverna ritar och skriver (notationer) för att illustrera sin problemlösning, men i och med vårt syfte att fånga aspekter av undervisningen beskriver vi här endast exempel på notationer som läraren gör och diskuterar dem i förhållande till vad de visar och vilken innebörd som görs synlig för eleverna.

De allra flesta observationer av notationer är siffersymboler som framställs i numeriska uttryck såsom 4+3=7 eller i en talrad "1, 2, 3, ...", men det finns också andra notationer som streck för att hålla ordning på en uppräkning av antal objekt (IIIII alternativt 卌) eller rena illustrationer för att kontextualisera ett matematiskt innehåll. Vi ser också flera exempel där läraren genom notationer visar på olika innebörd av tal och särskilt hur tal kan representeras på olika sätt (se bild 16).

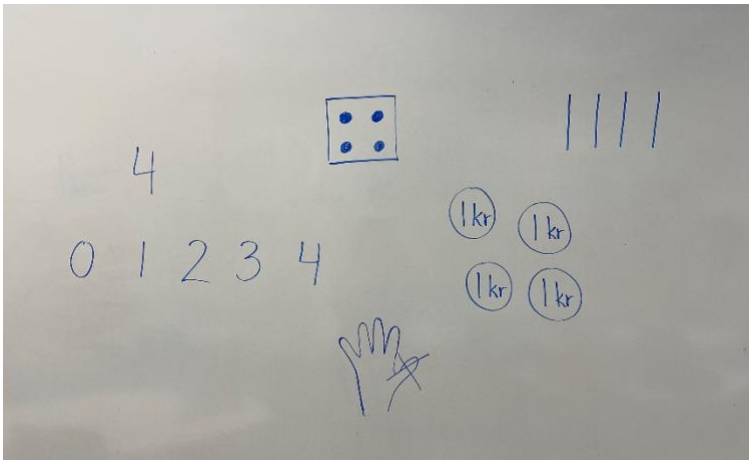

Bild 16. Notationer av talet 4 i olika sammanhang.

Notationer i syfte att visa på samband

Notationer är användbara i undervisningen för att de kan visa på samband som lyfts upp i stunden och kanske inte är förutsedda eller nödvändiga att förbereda så som artefakter är. I många situationer används notationer för att dokumentera antal, särskilt om antalet ökar stegvist så som i många spel och idrotter. Men om notationerna ska bli användbara och visa på antal så spelar det roll hur notationerna görs, om de kan visa på ett samband som hjälper oss att få en snabb överblick eller inte.

> Läraren: Och om vi skulle ha idrott och vill skriva fem. Hur kan man göra det? Om vi ska räkna poäng när någon gör mål?
> Elev 1: Som streck.
> Läraren: Så här (lärare ritar fem vertikala streck på tavlan)?
> Elev 1: Ja!
> Läraren: Har någon sett något annat sätt man kan skriva? Det är ganska svårt att se hur många streck det är. Titta här (läraren ritar till ännu fler streck).
> En elev räcker upp handen.
> Elev 2: Ett streck över!
> Läraren: Ja, kan du visa oss på tavlan?
> Eleven ritar fem streck och ett streck snett över dessa fem.
> Läraren: Du är på helt rätt väg. Vi räknar strecken tillsammans. Ett, två…sex.
> Läraren: Vi tar bort ett streck och så räknar vi igen (suddar ett av strecken under det sneda strecket)! Ett, två…fem.
> Elev 2: Nu är det fem.

> Läraren: Det långa strecket är det femte strecket. När det är så här (pekar på femgrupperingen) är det alltid fem (läraren håller upp fem fingrar).

Notationen som läraren gör tillsammans med eleverna är en halvabstrakt representation för antal där det är samma antal streck som noteras, men sättet att dra det sista strecket tvärs över de fyra första gör att de bildar en urskiljbar enhet, en "femhet". Läraren gör i exemplet tydligt att det behöver vara samma antal där "det långa strecket är det femte strecket" och att det därmed representerar antalet fem.

I skogen undersöker eleverna tillsammans med läraren på vilka sätt talet 5 kan delas upp. Man försöker hitta alla varianter genom att konkret dela upp fem bollar i två delmängder och behöver då notera vilka sätt man prövat. Läraren har med sig tavlor att skriva på och noterar varje ny uppdelning vilka delmängder som skapades (se bild 17). På tavlorna skrivs tre tal, helheten 5, och delarna: 0|5, 1|4, 4|1, 3|2, och 2|3, vartefter eleverna kommer på nya sätt. Eleverna prövar sig fram genom olika kombinationer och läraren noterar. För att göra det möjligt att se om alla varianter av uppdelning gjorts ordnar läraren tavlorna så att motsvarande uppdelning såsom 2 och 3 respektive 3 och 2 ligger intill varandra, likaså med 4 och 1 respektive 1 och 4 och det sista paret 0 och 5 respektive 5 och 0. Tal-triaderna blir då möjliga att jämföra och eleverna kan se sambandet i att samma delar ger samma helhet oberoende av hur delarna är ordnade (exempelvis 3 och 2 eller 2 och 3). Sambandet upptäcks inte nödvändigtvis spontant av alla elever utan behöver pekas ut av lärare, till exempel så som läraren här ovan gör när hon lägger tavlorna med motsvarande triader intill varandra. Notationerna kan alltså inte antas självständigt visa på sambandet utan behöver i detta fall förtydligas med gester och hur notationerna ordnas och grupperas.

Bild 17. Tal-triader på tavlor.

Notationer på tavlan kan tyckas vara spontana infall och en styrka är just spontaniteten där läraren kan fånga upp en elevs inspel och förslag direkt. Däremot ser vi oftare ändå exempel på att läraren har tänkt ut på förhand på vilket sätt notationerna ska framträda på tavlan för att på bästa sätt synliggöra det samband som läraren har som mål att visa. I exemplet nedan har eleverna tidigare i pararbete listat ut på vilka sätt de kan dela upp fem frukter i två skålar och gjort egna notationer i häften. Nu samlar läraren ihop förslag från eleverna och skriver upp alternativen på tavlan. Cirklarna görs först och därefter fyller läraren i prickar ordnade i tärningsmönster för att antalen ska vara lätta att uppfatta för eleverna, och skriver dessutom samma uppdelning uttryckt som en addition med tal och symboler som + och = (se bild 18). Eleverna ger förslag utan särskild ordning och läraren strukturerar upp elevinspelen genom att fylla i cirklarna så att ett stigande antal urskiljs i de röda cirklarna uppifrån och ner, respektive fallande antal urskiljs i de blå cirklarna sett uppifrån och ner. Det som skiljer cirklarna från de numeriska uttrycken är att i de senare framträder helheten (5) symboliskt, vilket läraren endast muntligt konstaterar när cirklarna fylls med prickar.

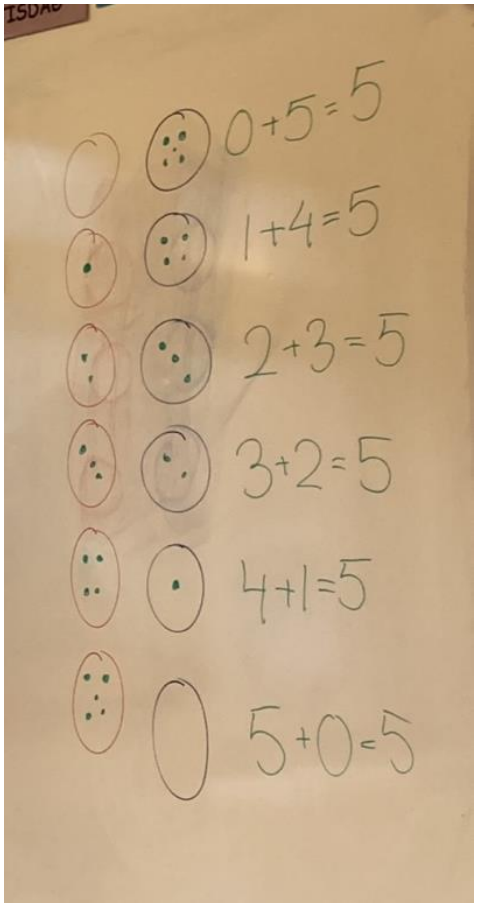

Bild 18. Notationer som visar möjliga uppdelning av talet fem i två delar samt motsvarande uppdelningar uttryckta som additioner.

Notationer är värdefulla didaktiska verktyg när läraren har en idé om att det är ett visst samband som ska synliggöras, men där till exempel värdena inte är kända sedan tidigare utan läraren kanske väljer att lyfta fram elevernas erfarenheter. Då används notationer på ett strukturerat sätt men med öppenhet för att innehållet som utgör grunden för en problemlösning kan variera. Ett exempel på detta är observationer i statistiska undersökningar. Elevernas erfarenheter (vare sig det är medhavd frukt till mellanmålet eller favoritfärg) sorteras upp och läraren skapar en struktur genom notationerna som alltså växer fram på tavlan och åskådliggör samband mellan olika mängder. En lärare dokumenterar till exempel vilket mellanmål som eleverna har i sina mellanmålslådor och skriver i ord och bild på tavlan längs en horisontell axel. Sedan fyller läraren på med ett kryss för varje elevs äpple, banan, riskaka och så vidare. Läraren anstränger sig för att göra kryssen lika stora för att staplarna ska kunna jämföras visuellt och inte behöva räknas. När allas mellanmål är noterade jämförs staplarna och läraren skriver antalet med siffror över respektive stapel och man diskuterar begrepp som fler och färre, lika många, hur många fler.

En värdefull aspekt av att använda notationer på ett strukturerat sätt som i exemplen ovan, är att notationerna finns kvar på tavlan och det är möjligt att samtidigt se likheter, skillnader och samband. Därför behöver notationerna användas på ett genomtänkt sätt, för att undvika att något suddas ut eller behöver byta plats, när notationerna växer fram på tavlan. Så snart en notation suddas ut kan man inte längre relatera till den, jämföra och peka på likheter och skillnader. Notationer som står kvar på tavlan under hela undersökningen blir däremot ett kraftfullt verktyg i undervisningen där läraren kan fånga det spontana, strukturera och visa på betydelsefulla matematiska egenskaper hos tal och hur tal kan användas i problemlösning.

Notationer i syfte att presentera uppgift eller svar

På samma sätt som artefakter kan användas på strukturerat och ostrukturerat sätt, ser vi att notationerna används på liknande sätt, med olika utfall för elevernas möjligheter att få syn på tals egenskaper. I en del observationer ser vi att notationer görs främst i syfte att notera elevernas svar, även om läraren diskuterar med eleverna om varje exempel som noteras. Det kan till exempel vara att eleverna ger förslag på hur ett tal (eller ett bestämt antal kakor) kan delas upp och läraren noterar både med prickar (kakor på fat) och numeriska symboler (till exempel 3+2=5), men *utan* att systematiskt visa på några samband *mellan* exemplen att om det till exempel blir en mer på ett fat så måste det bli en mindre på det andra fatet som gör att det finns ett specifikt antal sätt att göra en uppdelning av ett visst tal. Notationen blir istället en dokumentation av en isolerad uppgift.

Notationer görs i vissa fall för att presentera en uppgift och för att hålla i minnet vad en uppgift går ut på, såsom hur många ben två hönor och en hund har tillsammans (se bild 19). Notationen är då inte strukturerad på sätt som visar på samband mellan tal och mellan olika exempel, men kan vara av betydelse för att presentera uppgiften. På liknande sätt görs notationer för att dokumentera svar på en uppgift. Här finns dock en risk med användningen av små skrivplattor som läggs mitt på bordet, ifall

eleverna sitter på flera sidor kring bordet. Notationer är ofta symboler, som ska läsas från ett håll och riktningen spelar roll för tolkningen (jämför 6 och 9 som tolkas olika beroende på från vilket håll man ser dem).

I de fall notationer används för att dokumentera svar, till exempel på en uträkning, finns ändå möjlighet att strukturera så att tals egenskaper som sammansatta och del av större helhet kan urskiljas. Till exempel hade en lärare ritat ett streck för varje funnet objekt i en bild, vilket resulterat i en lång rad av streck för vissa objekt och färre streck för andra objekt. För att få en överblick av antalen gör läraren då om vart femte streck till ett tvärgående streck över de fyra föregående (𝍸) och strukturerar på så sätt notationerna så att antalen blir överskådliga som femgrupper.

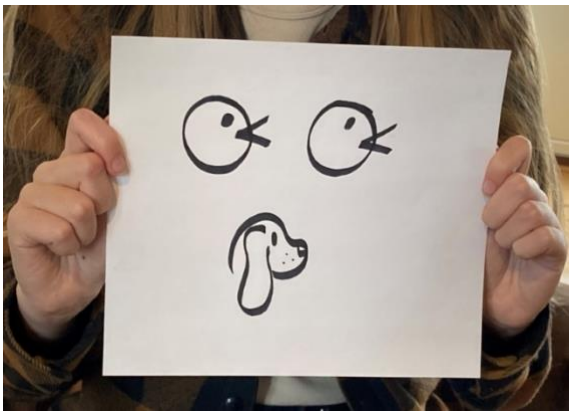

Bild 19. Notation för att presentera en uppgift.

Metoder för att lösa uppgifter

Kartläggningen visar att undervisningen sällan lyfter fram lösningsmetoder på sådant sätt att olika metoder kan jämföras och då även värderas hur väl de fungerar eller om det finns mer effektiva sätt att försöka lösa en uppgift (se även översikt på sidan 10). Nedan följer exempel och diskussion om på vilket sätt metoder för att lösa uppgifter kan synliggöras i undervisning och bidra till att elever får en fördjupad förståelse för hur tal kan användas i problemlösning.

Att räkna för att bestämma antal är kanske den mest vanliga associationen när det handlar om metoder för att lösa uppgifter som berör antal. Och att veta hur man bestämmer antal är en grundläggande färdighet som många barn utvecklar i tidig ålder, men en del barn behöver stöttning. Räknandet behöver göras systematiskt för att fungera som ett redskap för antalsbestämning. Detta ser vi ett flertal exempel på att lärare på olika sätt poängterar för eleverna i undervisningen om tals användning. Nedan ser vi två exempel, där det ena gör att eleven uppmärksammas på *att* något behöver göras på annat sätt, medan det andra uppmärksammar eleven på *vad* som behöver göras på annat sätt. Exemplen kan tyckas snarlika, men ifall en elev inte redan vet hur man räknar fram ett antal i en avgränsad mängd, hjälper det inte att sätta föremål på rad eftersom det kritiska är att koppla ihop ett föremål med ett räkneord. Visserligen underlättar en jämn rad att inte missa något föremål som ska räknas, men den nödvändiga ett-till-ett-korrespondensen mellan föremål och räkneord framträder inte så som den gör i det andra exemplet där läraren stannar upp och förklarar hur en kloss och ett räkneord binds ihop i uppräkningen.

> Högar med föremål av liknande slag ligger på golvet. Läraren: “Kan vi räkna tillsammans?” Eleverna räknar rytmiskt i kör till 10, samtidigt som läraren med en handdocka *snabbt* pekräknar en hög med kastanjer till 12. Alla räknar långsamt igen och dockan ordnar kastanjerna i en rad. Läraren: ”Sortera något mer för mig”. En elev samlar stenar i en hög. Läraren låter dockan slarvräkna snabbt igen. Eleven flyttar och räknar varje föremål till tio. Läraren: ”Får jag försöka”. Läraren pekar och slarvräknar snabbt. Läraren: ”Hjälp mig, vi lägger dem på rad”. Flera elever räknar i kör tillsammans från ett till tio.

Läraren har i exemplet ovan medvetet skapat en situation där handdockan “slarvräknar”, vilket ska uppmärksamma eleverna på att här gör dockan något som inte riktigt stämmer. Och de flesta eleverna svarar och förklarar för dockan hur man systematiserar genom att lägga föremålen på rad, för att kunna räkna så det blir rätt antal. Men märk väl att det är eleverna som bidrar med strategin, och

undervisar handdockan. Det är visserligen ett sätt att befästa hur man systematiserar för att kunna räkna större antal när man förklarar för någon annan, men de elever som ännu inte har upptäckt vilken skillnad det gör att strukturera föremålen som ska räknas, lämnas att göra den upptäckten själv genom att observera vad andra gör. Det är inte säkert att eleven då uppfattar vad det är som gör skillnaden mellan att räkna en hög eller en rad, om ingen direkt pekar ut för eleven varför det är en framgångsrik strategi för uppräkning att skapa strukturer som är överblickbara.

I följande exempel bestämmer eleverna och läraren tillsammans hur många klossar de samlat ihop i en gemensam uppräkning, där läraren skapar strukturen (en rad) och eleverna uppmanas hålla ordning på hur antalet växer (genom att räkna). I jämförelse med det tidigare exemplet uppmärksammar läraren här inte bara hur man ska räkna upp utan stannar upp och förklarar *varför*, det vill säga gör en värdering och motivering av tillvägagångssättet.

> Läraren samlar in klossar från alla elever och frågar hur många klossar det kan vara och undrar om de inte kan räkna efter tillsammans och sätta ihop dem i en lång rad. Läraren sätter ihop klossarna en efter en, eleverna räknar i talkör, en del elever räknar snabbare än läraren hinner sätta fast klossarna i varandra. Läraren stannar upp och säger ”Nej, ni måste titta på vad jag gör, annars kan vi inte veta hur många vi räknat och får börja från början. När man *klickat på* den, *då* säger man nästa tal”.

Förklaringar och motiveringar är viktiga i matematikundervisningen även när det gäller till synes enkla procedurer. I forskning om matematiklärande har man länge betonat betydelsen av att elever inte bara vet hur man bör göra utan förstår varför en procedur fungerar för att lösa en uppgift. För att uppräkningen ska fungera för att ta reda på antal behöver varje räkneord paras samman med en kloss och att detta görs samtidigt, det vill säga en kloss adderas och nästa räkneord representerar “en till” i riktning mot ett växande antal totalt sett. Det som sker med klossarna (de blir fler) är inte en parallell aktivitet till ramsräknandet, utan de knyts samman av läraren i exemplet med klossarna ovan och motiverar på så sätt varför uppräkningen behöver vara systematisk och kopplad till det som ska räknas.

Ju större antal som ska räknas, desto viktigare att vara noggrann och systematisk i uppräknandet, för att slippa tappa bort sig och tvingas börja om från början. Men det finns också andra dimensioner av att systematisera som bidrar till att eleverna utvecklar sin taluppfattning och hur tal kan användas i problemlösning. Att systematisera räknande och till exempel strukturera föremål som gör det lättare att se och räkna större antal är en viktig del i att lära sig använda tal. Det lägger också grund för att skapa “units” det vill säga se ett antal som en enhet, såsom tio består av tio *en*-heter men kan också ses som ett tiotal, det vill säga *en* enhet som kallas *tio*. I ett längre perspektiv är det mycket betydelsefullt att se tal som sammansatta i enheter eller “units”, det gör att man till exempel kan räkna tiotal som “tio, tjugo, trettio” hellre än att räkna en och en från “ett, två, tre, ...” Att för eleven göra synligt hur en systematisk sammansättning av en-heter tillsammans bildar större enheter eller “units” är därför grundläggande egenskaper hos tal som eleven behöver erfara, inte bara för att kunna räkna fram ett antal, utan för att se hur strukturer kan skapas som hjälper i problemlösning. I följande exempel tar läraren avstamp i tappade tänder, det vill säga man pratar om och följer upp hur många mjölktänder eleverna tappar under året, per elev och som grupp och ger stöd för eleverna att se antal som enheter. Olika metoder för att strukturera antal som tio-enheter lyfts fram för eleverna.

> Läraren: Hur många tappade tänder (klossar) som ni haft i munnen. Ni får tio tänder var (läraren häller ut kuber i en hög på golvet). Så tar alla tio var. Hur gör man smartast? Tar en hög eller plocka direkt? Så det skulle bli enklare att se hur många det var?
> Elev: En rad
> Läraren: Eller två rader. Om man har tio kan man ha i hög eller i en rad eller två rader.

Läraren öppnar här upp för att det kan finnas flera sätt att skapa en grupp av tio föremål, i detta fall klossar som ska symbolisera tänder. Hon signalerar att det kan finnas "smarta" sätt och förklarar att syftet (det som är smart) är att göra det enklare att se när det är tio föremål. Tre förslag presenteras, men det görs här ännu ingen värdering av vilket sätt som faktiskt kunde vara smartast, men det återkommer man till senare:

> Läraren: Ska vi sätta ihop dem så ser vi? Den var tio, lätt att räkna (pekar på en stapel med tio) de var svåra att räkna med (pekar på staplar med olika antal). Den lätta ställer vi här, de här blir så svåra att räkna (tar upp alla staplarna på ett bord, se bild 20a).
> Elev 1: En trappa.
> Elev 2: Tror inte det går.
> Elev 1: Jo, räkna hur många de är?
> Läraren: Ska vi räkna var för sig eller som vi gjorde här (pekar på staplar med tio klossar bredvid).
> Elev 1: Tjugo, trettio, fyrtio…
> Läraren: Hur ska jag göra tioskutt då? Om jag bygger så jag får tiostaplar?
> Elev 1: Ja!
> Läraren: Och så räknar jag (flyttar över klossar så det bildas fler tiostaplar, se bild 20b och 20c). Kolla, här var det lättare att räkna, hoppa tio skutt.
> Eleverna i talkör: Tio, tjugo, trettio.
> Läraren: Och ett, två, tror ni vi hinner tappa så många tänder?

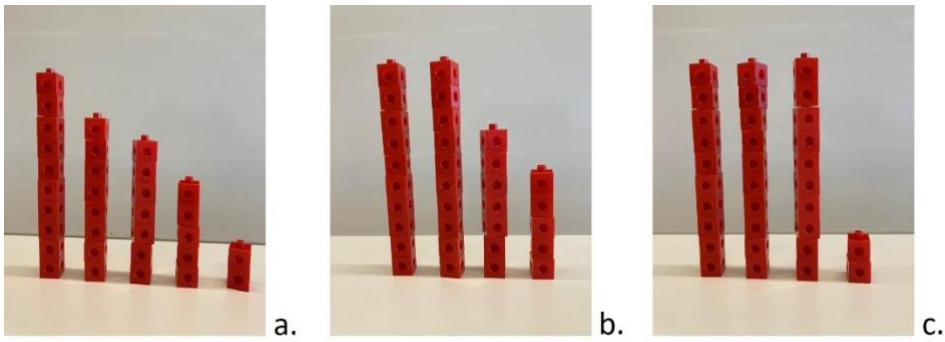

Bild 20. Från oregelbundna staplar till tio-enheter.

Efter episoden som beskrivs ovan fortsätter läraren och eleverna att lägga ihop klossar som "tappade tänder" och kommer ända upp till nittiofem, ordnade i tiostaplar och en femstapel. Nittiofem är ett stort tal att få grepp om. Men enligt läraren var avsikten inte att eleverna skulle räkna med tal upp till hundra, utan att de dels skulle få en känsla för större antal (ungefär hur många nästan hundra klossar är), dels, eller kanske främst, upptäcka hur en-heter kan byggas ihop till tio-staplar som kan ses som sammansatta enheter eller "units". Operationen att skapa tiotal motiverades hela tiden med att "göra det lättare att se och räkna", vilket bidrar till en koppling till hur tal kan användas på effektivt sätt.

I kartläggningen ser vi få tillfällen där läraren undervisar om metoder, strategier och sätt att lösa problem, eller metoder för att kontrollera om ett svar är rimligt och korrekt. I några fall visar läraren hur en uppgift kan lösas, alternativt ber flera elever berätta om hur de tänker sig att man kan lösa ett problem. Men få gånger ser vi att läraren bidrar med en motivering och värdering av vilka problem-lösningsmetoder som är bättre eller sämre. Ett undantag är exemplet här ovan, där läraren kommer tillbaka till frågan hur de lättast ska kunna se hur många klossar de har när antalet blir stort. Det är ju så, att vissa metoder är bättre för att lösa en viss typ av uppgift och andra för andra uppgifter. En metod kan inte fungera för alla problem. En metod vi ser att läraren uppmuntrar hos elever som är osäkra på att bestämma antal (uppräkning) är att räkna igen, räkna långsammare, flytta på ett objekt åt gången. Det kan visserligen vara ett sätt att systematisera proceduren uppräkning, men i många fall

kunde läraren istället erbjuda eleven andra sätt att systematisera räknandet som även *vidgar elevens förståelse för tal som sammansatta enheter*, det vill säga erbjuda ett utvecklande sätt att se problemet och tals användning.

> Några elever spelar ett spel där de slår två tärningar för att bestämma hur många legoklossar de ska ta. En elev slår sex och fem på tärningarna, tar fram händerna och räknar vidare från hela handen "fem", viker fram ett finger åt gången på andra handen och räknar "sex, sju, åtta, nio, tio" men stannar upp när alla fingrarna är uppe. Läraren säger "Du kan räkna prickarna annars".

Lärarens förslag "att räkna prickarna" kommer sannolikt hjälpa eleven att lösa uppgiften med hur många prickar som tärningarna visar, men den metod som eleven själv initierat, att använda fingrarna som representationer för prickarna stöds inte. En strategi som eleven behöver tillägna sig i aritmetik är att i addition kan man börja addera vilket av talen som helst (kallas kommutativa lagen). Det är oftast en fördel att starta från det största talet eller i det här fallet börja med tärningen som visar flest antalet prickar (6) och addera det mindre antalet (5) till exempel genom att räkna vidare och hålla ordning på hur många som räknats med fingrarna. Ett annat sätt att strukturera uppgiften är att jämföra prickarna på tärningen med fingrarna, eleven kände ju uppenbarligen igen femman på tärningen och att den motsvarar "hela handen". Hittar man fem på andra tärningen också blir ju en prick över och man kan resonera om "fem och fem" som "båda händerna" vilket de flesta brukar känna igen som tio, och därifrån resonera om hur många "tio och en till" är tillsammans. Så istället för att "backa" till en mer primitiv metod som att räkna prickarna en och en för att bestämma antal, kunde man främja elevens taluppfattning och ge stöd för eleven att *använda* talens egenskaper (delar som relaterar till varandra och bildar en större helhet) för att lösa uppgiften.

Att visa på matematiska samband

Kartläggningen visar att i ungefär hälften av observationerna tar läraren stöd i artefakter, notationer, ord och gester för att visa på matematiska samband hos representationer eller mellan exempel (se översikt sidan 10). Undervisningen kan då bidra till elevernas kunskapsutveckling, men här finns även utvecklingspotential att ytterligare binda samman och visa på likheter och skillnader som är av betydelse för att förstå tals egenskaper och hur tal kan användas. I exemplen vi lyfter fram nedan vill vi belysa hur läraren kan synliggöra samband som gör det matematiska innehållet relevant och meningsfullt för eleverna.

En central färdighet i matematik är att förstå och kunna tolka matematiska samband. Matematiska samband "binder ihop" saker eller händelser, så att till exempel matematiska begrepp kan förstås i större sammanhang och i ett helhetsperspektiv. Matematiska samband visas av lärarna i enkla jämförelser till exempel där läraren tydliggör med bilder, ord och gester *på vilket sätt* något hänger ihop.

> Läraren visar en bild på tavlan med fyra kolumner där olika antal karameller finns i varje kolumn: "Ellen och Marwa har lika många karameller, håller ni med?" Läraren väntar in elevernas svar. En elev svarar att de har lika många. Läraren fyller i: "Lika många, men hur många har dom?" En annan elev svarar att "Det är lika långa rader så man måste inte räkna. Om man drar en linje så blir det lika, så kommer dom på samma linje." Läraren visar med handen som en linje över raderna med karameller (horisontellt nerifrån och upp) och säger "Man ser att det är lika många, man kan parbilda".

I exemplet ovan är det en elev som upptäckt ett samband och beskriver i ord hur man kan se om det är lika eller olika många karameller i kolumnerna. Lärarens handrörelser är viktiga här för att visa på det samband som eleven beskrev så att alla andra elever också kan följa resonemanget och jämföra antalen.

Ett matematiskt samband som elever ofta möter är proportionella begrepp som “dubbelt” eller “hälften” där begreppen inte har exakta värden i sig själva (som “två” eller “tjugo”) utan hur mycket dubbelt är beror på utgångsvärdet (det som dubbleras). Matematiska samband hör också samman med orsak och verkan. Tiokamraterna är ett innehåll som vi observerat i flera undervisningsepisoder, vilket kan bli ett undersökande av sambandet mellan talen om eleverna får möjlighet att få syn på hur talparen följer ett system, till exempel om man börjar från 5 och 5 som man vet är 10, flyttar över så det ena talet i paret är ett mer (6), så måste det andra talet i paret minska med ett (4). Där finns alltså ett matematiskt samband som är betydelsefullt för att förstå vad man kan göra med tiokamraterna, men det är inte självklart att elever upptäcker detta samband utan undervisning. I kartläggningen ser vi exempel på när matematiska samband synliggörs i olika aktiviteter, där sambanden också blir meningsfulla i det sammanhang de presenteras. Till exempel i spel och lekar med tävlingsmoment kan det behövas redskap för att hålla ordning och reda på spelarnas turer och poäng. Det blir nödvändigt att strukturera spelet och dess utfall så att det blir begripligt och överskådligt för deltagarna.

I en klass spelade man “bowling”. Målet med bowling-aktiviteten var att eleverna skulle lära sig om talet 10 och särskilt att dela upp 10 i talpar. Till stöd för uppdelningen har eleverna en ”regnbåge” med tal uppsatta på väggen, och på inplastade kort, som visar vilka tal som tillsammans är tio (se bild 21).

Aktiviteten startar med att läraren återkopplar till en för eleverna känd situation.

> Läraren: Jag vet att några av er har varit och spelat bowling. I vår bowlinghall ser käglorna ut så här. Uppgiften idag är att se hur många man får ner och hur många som står kvar. Om man får ner tio, hur många står kvar?
> Elever: Noll.

Bild 21. Regnbåge illustrerar talpar för talet 10.

Under aktiviteten får eleverna var och en rulla en boll mot käglorna. Alla elever får samma två frågor: ”Hur många har du kvar?” och ”Hur många har fallit?”. Läraren riktar varje gång elevernas uppmärksamhet mot tiokamraterna på regnbågen.

> Läraren: Man kan titta att det stämmer (pekar på regnbågen).
> Elev: Ner tre och sju kvar.
> Läraren: … och det stämmer med den (pekar på regnbågen, se bild 21), tre och sju.

Efter bowlingen visar läraren hur man kan rita käglor som står och som fallit ner och hur man kan skriva detta på ”matematikspråket”. Eleverna dokumenterar sitt bowlingslag genom att rita en egen bild och beskriva situationen med tal och matematiska symboler (se bild 22).

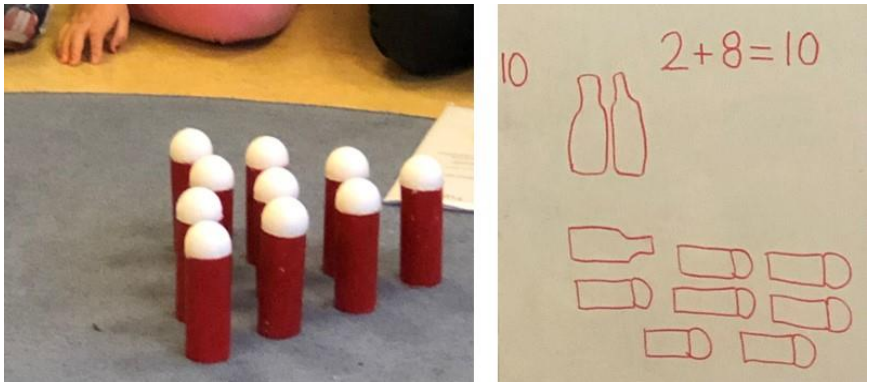

Bild 22. Bowlingkäglor och notationer.

Genom aktiviteten får notationen 2+8=10 en innebörd för eleverna i och med att läraren uppmärksammar dem på det samband som finns mellan talen (2 och 8 och 10). Genom att eleverna prövar egna exempel får de även se många olika uppdelningar av 10 och kan med hjälp av regnbågen få syn på det matematiska sambandet. Genom att betona båda delarna, de käglor som står kvar och de käglor som fallit, får eleverna möjlighet att se relationen mellan de två delarna och helheten 10. De får dessutom stöd i hur siffrorna skrivs och att både ritade och skrivna symboler kan användas, vilket visar på samband mellan olika sätt att representera tal.

Att undervisa om matematiska samband ser vi ofta görs som undersökande uppgifter, där eleverna prövar sig fram för att hitta likheter och skillnader. Elevens perspektiv blir viktigt i undervisningen eftersom läraren behöver "se" vad det är som eleven ännu inte har fått syn på, och erbjuda sådana erfarenheter som gör att eleven kan upptäcka sambanden. Läraren i följande exempel lyssnar in och tolkar elevernas förslag och förstärker de samband som framträder med stöd av både ord och gester.

> På bordet ligger talblock storleksordnade från ett till tio. Läraren tar upp två block, fyra och fem och håller dem i sina två händer.
> Läraren: Vad är skillnaden mellan de här?
> Elev 1: … den är udda och den är jämn.
> Läraren: Vilken menar du?
> Eleven funderar och pekar sedan på blocken.
> Läraren: Om man ska göra dem lika hur kan man göra då? (Lägger blocken på bordet).
> Elev 2: Ta bort en på femman.
> Läraren visar med handen på den femte delen i blocket.
> Elev 3: Lägga till en.
> Läraren tar talblocket för ett och lägger det ovanför talblocket för fyra (se bild 23).

Bild 23. Talblock 4+1 och 5.

Läraren lyssnar i exemplet ovan på hur eleverna resonerar och sätter ord på de samband som eleverna kanske upptäckt men ännu inte kan verbalisera. Att jämföra blocken och uttrycka på vilket sätt de skiljer sig åt, eller som i exemplet hur de kan göras lika, visar att tal är sammansatta av mindre tal. I undervisningen utvecklas denna förståelse inte enbart genom verbala förklaringar utan särskilt när sambanden undersöks med det konkreta materialet och likheter och skillnader kan bli visualiserade för eleverna.

I observationerna har vi sett att lärare ofta använder olika material och notationer för att synliggöra relationer inom tal för eleverna. En lärare använde en vanlig sexsidig tärning för att få eleverna att upptäcka del-helhets-relationer inom talet 7. Summan av antalet prickar på två motstående sidor på en sexsidig tärning är alltid 7 och detta samband nyttjades av läraren i undervisningen.

> Läraren: Jag kastar tärningen så får vi se vad den visar (läraren kastar tärningen).
> Elever: Sex!
> Läraren: Jag vet hur många prickar det är på den motsatta sidan, den sidan som är här under ner mot mattan. Det är en prick.

Läraren lyfter upp tärningen och visar för eleverna som blir väldigt imponerade. Läraren gör om samma procedur flera gånger. Tärningen kastas och hon avslöjar vad som finns på motsatt sida varje gång. Efter en liten stund frågar läraren hur det är möjligt att veta vilket antal prickar som finns på motsatt sida. Eleverna är väldigt engagerade och en del svarar att de tror att läraren memorerat svaren eller att läraren hinner titta på alla övriga sidor på tärningen och då kan använda uteslutningsmetoden för att veta vad som finns på den sidan som ligger ner mot mattan. En elev säger sedan att han tror att läraren använder ett mönster men har svårt att beskriva hur. Läraren säger att de får försöka lista ut tillsammans hur hon kan veta antalet prickar. Läraren reser sig och ställer sig vid tavlan. Hon ber en elev att kasta tärningen.

Läraren: Fyra, vad finns nu under?
Elev 1: Tre!
Läraren: Hur visste du?
Elev 1: Jag kom ihåg.
Läraren ritar kombinationen av tärningarna som visar fyra och tre på tavlan. Proceduren att kasta tärningen upprepas igen och kombinationen fem och två ritas upp av läraren på tavlan.
Läraren: Hur mycket är fem och två tillsammans?
Elev 2: Sju!
Läraren: Ja! Och fyra och tre då?
Elev 2: Också sju!
Läraren: Aha, vi testar att slå tärningen igen.
Efter att tärningen kastats ytterligare ett par gånger och läraren ritat upp kombinationerna på tavlan så utbrister en elev: Det är ju alltid sju!

Läraren och eleverna kontrollerar påståendet att summan av prickarna på de två motstående sidorna alltid är sju tillsammans och konstaterar att det verkar stämma, talet 7 kan sättas samman av två mindre tal på flera olika sätt. Läraren utgår från del-del och via det mönster som framträder för summan av två motstående sidor på en sexsidig tärning får eleverna upptäcka additionskombinationer av naturliga tal (1–6) som tillsammans kan bilda helheten 7. Den systematiska undersökningen av talkombinationerna, samt dokumentationen på tavlan gör att kombinationerna kan ses samtidigt och jämföras med varandra vilket synliggör det matematiska sambandet och talrelationerna för eleverna.

Matematiska samband är betydelsefulla att urskilja för eleverna så att de vidgar sin förståelse för tals egenskaper och hur tal kan användas. Samband är däremot inte självklart urskiljbara utan behöver ofta göras synliga och förklaras av läraren. Som i exemplet ovan, där lärarens ordval “ettan” och gester som ringar in och förtydligar vad som är lika eller olika, bidrar till att förklara det som eleverna intuitivt erfar eller ännu inte själva kan sätta ord på. I många fall är artefakter och notationer bra för att synliggöra samband och strukturer, men lärarens förtydliganden är ofta nödvändiga, vilket blivit synligt i våra observationer. När förtydligandet (i jämförelser, ord, bilder eller gester) uteblir, lämnas eleven ensam i sin tolkning och de nödvändiga sambanden förblir dolda för eleven. Särskilt viktigt tycks möjligheten att samtidigt se likheter och skillnader, det vill säga att läraren inte enbart ger konkreta exempel ett efter ett, utan att exemplen finns kvar, synliga, så att det är möjligt att gå tillbaka för att jämföra och se samband.

Hur tas elevsvar tillvara?

Svensk utbildning tar i stor utsträckning utgångspunkt i att undervisningen ska vara kommunikativ och interaktiv, det vill säga eleverna uppmuntras att berätta hur de tänker, att lyssna till varandra och att lösa problem tillsammans. Ambitionen att involvera alla elever är hög och lärare ställer ofta frågor till eleverna som förväntas ge förslag och svar. Mer sällan ser vi däremot i våra observationer att elevernas svar och förslag på lösningar utvecklas genom problematisering och jämförelser mellan olika förslag (se översikt sidan 11). Elevinspelen kan därför utgöra större eller mindre bidrag till undervisningen och elevernas möjligheter till lärande.

Bekräftelse på vad eleven kan

Elever behöver bekräftas när de deltar i undervisningen och ger förslag på lösningsmetoder och svar. Våra observationer visar att lärarna i förskoleklasserna ofta uppmärksammar eleverna på sätt som kan tolkas som bekräftelse och uppmuntran. Sådan bekräftelse kan uttryckas som: “jättebra”, “snyggt”, “det är rätt”. Men det finns också exempel där läraren besvarar elevernas inspel på mer utvecklande sätt:

> På tavlan finns nio cirklar ritade vilka representerar kakor. Uppgiften som eleverna gör individuellt vid tavlan är att dela upp kakorna på valfritt sätt och rita sitt lösningsförslag på tavlan.
> Läraren: Hur ska vi göra för att dela upp kakorna, nio kakor?
> En elev skriver 5+4 på tavlan.
> Läraren: För fem plus fyra är?
> Eleven: Nio.
> Läraren: Bra jobbat.

Eleven ger ett förslag på hur uppgiften kan lösas i skrift på tavlan och läraren följer upp förslaget genom att be eleven befästa varför hon eller han valt just 5+4 och avslutar med "bra jobbat" när eleven bekräftar det läraren frågar efter. I dialogen finns ingen utmaning eller problematisering av förslaget utan det läraren frågar efter är bekräftelse på att eleven ser talens relation till varandra. Dialogen kan fungera som ett förtydligande på vilket sätt förslaget är ett lämpligt svar på uppgiften, som övriga elever då får ta del av. I några fall ber läraren flera elever berätta hur de löser en och samma uppgift och bekräftar på så sätt att eleverna löst uppgiften på lämpligt sätt:

> Läraren frågar hur eleverna löste en uppgift att addera sex och tre inbäddat i en mattesaga och upprepar elevernas beskrivningar "Ni räknade på fingrarna. Ni har skrivit nio och lagt nio marker (5+4 i rader) väldigt bra. Och ni har lagt sex och tre marker i två rader."

Läraren bekräftar alltså elevernas svar men gör här ingen ansats att rikta uppmärksamheten mot de olika lösningsförslagen, till exempel genom att jämföra vilka förslag som är lämpliga. Därmed blir aktivitetens mål att lösa uppgiften och komma fram till ett svar. Processen lyfts inte fram till betraktelse, vilket hade kunnat bidra till att eleverna får tillgång till en större repertoar av lösningsmetoder och en insikt om att vissa metoder kan vara mer eller mindre lämpliga för den typen av uppgift de nu skulle lösa. I matematikdidaktisk forskning poängteras betydelsen av att flexibelt kunna välja lämplig metod och inte fokusera enbart på att komma fram till ett svar. Det räcker därmed inte att stanna vid att bekräfta vad eleven visat att hon eller han bemästrar.

Bekräftar och utvecklar svar

Även om elever behöver få bekräftelse för att de lyckas lösa uppgifter hävdar vi att det är betydelsefullt, inte minst i ett långsiktigt perspektiv, att läraren tar hand om elevers svar och förslag genom att utveckla deras inspel. Ibland kan det vara korta inslag i undervisningen, som att förklara innebörden av ett begrepp när en elev inte förstår vad som efterfrågas:

> Eleven: "Vad är större än?"
> Läraren: "Fler än."

I synnerhet när begrepp är nya behöver läraren visa begreppsinnebörd på ett varierat sätt så att det blir begripligt för eleven. Men också där eleven som föreslår ett svar verkar ha begreppslig förståelse är lärarens utveckling av svaret av betydelse, inte minst för att visa för övriga elever vad svaret grundar sig i, det vill säga förklara på vilka grunder ett svar är giltigt:

> Eleven slår två tärningar: Det blev 12.
> Läraren: Ja exakt det blir ju det. Sex plus sex är 12.

Ibland kan det hända att elever kommer med inspel som läraren i stunden endast bekräftar med ett kortare svar, men som läraren senare återkommer till:

> Elev 1: Om jag har tre och två så är det fem tillsammans. Fem plus fem är tio.
> Läraren: Ja, så är det.
> En liten stund senare ska läraren och eleverna skriva ett matematiskt uttryck där summan är fem.
> Läraren: Olle, du hade ett bra förslag förut.
> Elev 1: Tre plus två är lika med fem.

Läraren: Just det. Tre (visar tre fingrar på vänster hand) plus två (visar två fingrar på höger hand) är fem tillsammans. Tre plus två är fem.
Läraren skriver 3+2=5 på tavlan.

Genom att lyfta fram och tydligt visa på elevers olika lösningsförslag till samma uppgift skapas också tillfälle för att vidga den begreppsliga förståelsen samtidigt som eleverna då också får bekräftelse i att deras lösning är korrekt:

Läraren: Ni gör lite olika, det är helt okej! Ni visar tre så här (läraren visar tumme, pekfinger, långfinger) och så här (lillfinger, ringfinger, pekfinger) och så här (pekfinger, långfinger, ringfinger). Det är helt rätt för alla är ju tre.

Ett annat sätt att visa på olika sätt att lösa en uppgift är att bjuda in eleverna att beskriva hur de tänkt när de kommit fram till sin lösning på en uppgift. Genom att låta eleverna berätta och visa hur de tänkt fokuseras inte enbart lösningen (produkten) utan också processen för att komma fram till svaret. En lärare presenterade följande uppgift för sina elever: *Xander har fyra äpplen som han har tänkt äta tillsammans med sina tre kompisar, Hans mamma säger att hans fyra kusiner också kommer och hälsar på. Hur ska han göra?* Eleverna bjuds in att berätta om sina förslag till lösningar i gruppen. Därefter får var och en rita sin lösning (se bild 24) som läraren följer upp.

Läraren: Hur tänker du?
Eleven: Jag tänker halva, först fyra halva, sen fyra halva till.
Läraren håller upp fyra fingrar på sin hand och ”sågar” med sin andra hand mitt över de fyra fingrarna och säger: Två, fyra, sex, åtta.
Läraren skriver sedan vad eleven har berättat på pappret.

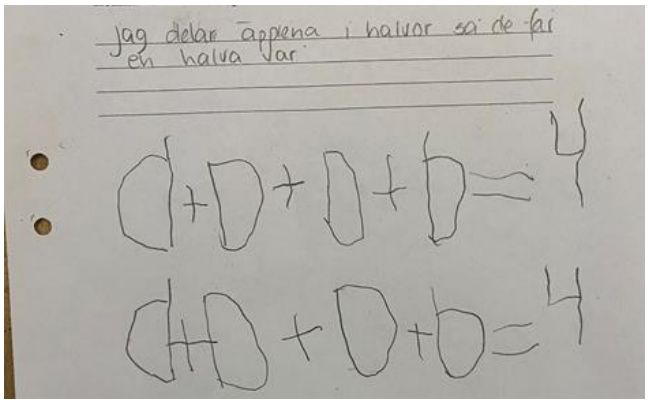

Bild 24. Elevsvar på uppgift om äppeldelning.

Ytterligare elevinspel och resonemang sker vid uppsamlingen på slutet då eleverna får berätta och visa sina lösningar för varandra. Två olika sätt föreslås av eleverna: en halva var eller att hämta ytterligare fyra äpplen.

Läraren: Så i vissa lösningar fick de ett helt äpple var, i vissa ett halvt äpple var. Finns det något mer sätt?... (tyst)
Eleven: Fjärdedelar… de delar varje äpple i fyra delar.
Läraren: Hur mycket får de då?
Eleven: De får en bit var och sparar resten.

I detta exempel öppnar läraren upp för flera elevers förslag och bearbetar dem *samtidigt.* Läraren illustrerar och representerar också elevernas förslag så att de ska bli tydliga och begripliga för alla elever. Läraren nöjer sig inte heller med att eleverna ger olika lösningsförslag utan frågar efter motiveringar till dessa, vilket gör att eleverna behöver förklara vad innebörden i förslaget är. Detta är en ganska stor utmaning för 6-åringar men de får gott stöd av läraren som för varje förslag visar på samma innebörd men på olika sätt; med fingrar, gester, nedskrivna förklaringar och elevernas egna tecknade förklaringar. På detta sätt ges eleverna bekräftelse för att de lyckas lösa uppgiften men lösningarna *utvecklas* i den erbjudna variationen av representationer.

Erbjuder icke-exempel

Det är i kontrasterna som innebörder uppmärksammas. Denna didaktiska princip ser vi tillämpas i en del observationer där läraren erbjuder så kallade icke-exempel, det vill säga exempel som inte är korrekta i det sammanhang som de presenteras för eleverna. För att icke-exempel ska bli didaktiska

verktyg förutsätts det dock att eleverna redan har en föreställning om hur något borde vara. Talraden är ett gott exempel där det för de flesta elever är lätt att känna igen när något tal hamnat på fel plats i ordningen. Den kontrast som uppstår, mellan hur talraden uppfattas som korrekt och det som eleven ser framför sig, kan motivera eleverna till att förklara och resonera om vad som är fel och hur det borde vara, samt varför. På så sätt bidrar resonemanget till att fördjupa den begreppsliga förståelsen för talens ordning, till exempel som i följande observation:

> Läraren visar talen ett till tio på skärmen. Talen är placerade i en korrekt ordning från ett till tio. När eleverna och läraren har tittat på talraden och kommit fram till att en talrad kan vara olika lång och fortsätta förbi talet tio, säger läraren: ”Om man gör så här (samtidigt som hon ändrar om ordningen på talen genom att dra dem på skärmen, se bild 25) kan man göra så?”. Eleverna protesterar. En elev säger: ”Då vet man inte vilka siffror som kommer…” En elev får i uppgift att ändra så att talraden stämmer igen. Läraren frågar sedan ”Stämmer det nu?” och ritar en horisontell linje med en pil (åt höger) under talraden.

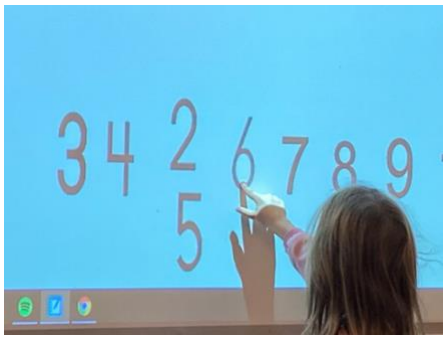

Bild 25. Talrad i oordning.

I en annan klass utnyttjar läraren också talens ordningsföljd som kunskap eleverna redan har tillägnat sig, men målsättningen är att visa på tio som enhet, som en grundläggande aspekt av tiobassystemet.

> Läraren trycker fast klossar på varandra tills stapeln har tio klossar samtidigt som hon och eleverna räknar upp hur många klossar som uppnåtts. När tiostapeln är klar ger hon stapeln till sin lärarkollega och fortsätter på en ny stapel och de räknar vidare från tio. Läraren: ”Nitton. Nu har jag tjugo här.” Läraren ger stapeln till den andra läraren och fortsätter trycka fast klossar till en ny stapel ”Tjugoett, tjugotvå … tjugonio och tjugotio” Eleverna protesterar högljutt. En elev säger ”Nej, trettio, det finns bara en tia, det är trettio.” Läraren stannar upp och de reder ut att stapeln har tio klossar men räkneordet som beskriver trettio inte kan vara tjugotio. Talkören fortsätter “Trettio, trettioett… trettionio”. Läraren: ”Trettiotio”. Eleverna protesterar igen: ”Nej”.

Läraren ger medvetet inget icke-exempel vid tjugo utan väntar med den överraskningen till trettio-övergången. När positionssystemet och tiobassystemet är nya för eleverna kan det språkliga sambandet som syns i tre-tio och fyr-tio vara en bro till att uppmärksamma tio-enheter och hur tiobassystemet byggs upp. Tjugo har inte samma språkliga koppling till två tior. När icke-exemplen används på detta sätt är det en förutsättning att eleverna kan räkneordens ordning (som ramsa) för att de ska kunna upptäcka när läraren gör “fel”. Men det är i denna upptäckt, eller konflikt med vad eleverna förväntar sig, som läraren fångar deras uppmärksamhet och kan stanna upp, undersöka och visa på det matematiska sambandet.

Vad gör läraren med elevers felsvar?

Matematikundervisningen i förskoleklass är naturligtvis en del i en mycket större helhet där läraren i stunden tar i beaktande många aspekter och väljer vad som ska lyftas fram och vad som kan vänta och utvecklas vid ett senare tillfälle. Eleven som spegelvänder siffersymbolerna när han skriver femman framme på tavlan kan i stunden ha gjort ett jättestort framsteg bara genom att våga gå fram och presentera sitt förslag. Men i något skede behöver också denna elev och de andra i klassen bli uppmärksammade på att det spelar roll hur siffersymbolerna skrivs, liksom att det finns regler i matematiken som man inte kan förbise för att kunna lösa en matematikuppgift och kommunicera lösningen. På sätt och vis har eleven rätt att få veta hur saker och ting är, både när det finns ett korrekt sätt och när olika svar är lika godtagbara. I en klass hade eleverna sprungit en viss sträcka ett antal gånger under rasten och klassen räknar gemensamt med lärarens stöd ihop hur många meter de har sprungit tillsammans. Summan av allas sträckor är 4600 meter och läraren frågar vad talet som nu

står på tavlan är. Eleverna ger olika förslag på hur man kan läsa ut det stora talet. En elev föreslår: ”fyrtiosex-hundra”, varpå läraren svarar: ”Ja det skulle man kunna säga, lika som femton-hundra. Fyratusensexhundra säger jag, det är jättebra sprunget.” Läraren fångar alltså upp elevens förslag och sätter det i ett sammanhang så att svaret blir begripligt, men erbjuder också ett mer etablerat sätt att läsa ut större tal.

Lärarna som vi har besökt är mycket uppmärksamma på elevers inspel och ger ofta positiv respons i termer som “jättebra”, “ja så kan man tänka” eller upprepar elevernas lösningsförslag så att alla i gruppen hör. Denna typ av respons kan stärka självkänslan hos eleven i att få bekräftelse på att elevens inspel är betydelsefullt och värt att uppmärksamma. Däremot kan det bli problematiskt om uppenbara felsvar bekräftas med “bra” eller “ja så kan man tänka”. Vi ser att elevsvar, alla elevsvar, är värdefulla och kan bidra till ett fördjupat lärande, men inte på bekostnad av att elevers felsvar godtas utan att problematiseras. Istället ser vi stor potential för lärande när läraren tar tillvara på felsvar och tillsammans med eleverna undersöker hur förslaget på lösning faller ut, om det är rimligt eller om det finns andra sätt som är mer effektiva för att hitta en lösning. Det förutsätter förstås att läraren vågar ta sig an felsvaren och ser hur de kan göras till ett bidrag i undervisningen. Till exempel:

> Läraren och eleverna undersöker talblock och hur de kan komma fram till antalet utan att behöva räkna alla delar utan starta i att “se” mindre antal. Läraren håller upp talblocket sju och frågar vad som kommer innan sju när man räknar. Hon räknar högt “Fem, sex, sju” (betonar sjuan). En elev svarar: ”Fyra”. Läraren svarar ”Aha, du tar åt andra hållet, baklänges” och räknar sedan högt ”Sju, sex, fem, fyra ” (betonar fyran).

Läraren noterar tydligt att svaret inte var det hon förväntade sig, men gör en tolkning i stunden av hur eleven kan tänkas ha resonerat för att komma fram till sitt förslag och visar för övriga elever att förslaget var rimligt om man räknar baklänges. Felsvaret blir på så sätt en kontrast som synliggör ordinaliteten och svaret som är alldeles korrekt om man tolkar “innan” som alla tal före sju i räkneramsan.

Följande är ett exempel där läraren tar vara på elevernas förslag, som är felaktiga, och använder dem för att kontrastera vad som är tänkbart utifrån elevernas egna erfarenheter. Läraren frågar efter ett gömt tal och ger ledtrådar.

> Läraren: Det finns en peng som är värd så många.
> Elev 1: Två.
> Elev 2: En trea.
> Läraren: Finns det en trekrona? Jaha.
> Elev 3: Fem.
> Elev 4: Fyra.
> Läraren: Finns det en peng som är värd fyra kronor, jaha?
> Elev 5: Sex.

Så här långt låter läraren eleverna ge alla möjliga förslag och tycks först bekräfta genom att säga ”jaha” till att det kunde finnas trekronor och fyrkronor. Ledtråden handlar om valören på mynt som hon med säkerhet vet att eleverna har erfarenhet av, men under tiden eleverna ger förslag på tal tycks mynt-ledtråden falla i bakgrunden och eleverna föreslår alla möjliga tal. Läraren riktar då uppmärksamheten tillbaka till ledtråden och plockar upp elevernas felaktiga förslag:

> Läraren: Har ni haft en sexkrona i handen (pekar på sin öppna handflata)?
> Elev 6: En tvåa, en femma, en tia har jag sett, men inte sex.
> Läraren: Sexan går alltså bort. Och trean.

I en annan undervisningssituation tar en lärare också tillvara en elevs felsvar. Så som vi uppfattar det försöker läraren förstå elevens svar och använda det som utgångspunkt för att resonera vidare mot rätt svar:

> Läraren: Skoldagar, hur många skoldagar är ni i skolan varje vecka?
> Elev 1: Sju!
> Några elever protesterar genast mot svaret.
> Läraren: Hur många dagar är det på en vecka?
> Elev 1: Sju!
> Läraren: Just det.
> Elev 2: Men vi är ju lediga lördag och söndag.
> Läraren: Ja, så då är det ju fem skoldagar.
> Läraren: Kolla här (läraren lyfter sina händer och håller dem framför sig). Måndag, tisdag, onsdag, torsdag, fredag (tar upp ett finger för varje dag på vänster hand) men inte lördag och söndag (visar två fingrar på höger hand som hon håller en bit åt sidan). Vi går fem dagar i skolan en vanlig skolvecka (markerar med att visa upp handen med fem uppfällda fingrar och röra handen sakta framför sig).

Läraren fångar upp elevsvaret "sju" som andra elever protesterar mot, men sätter felsvaret i perspektiv till att det motsvarar alla dagar i en vecka, något som frågan läraren ställde till eleverna också innefattade (varje vecka). Tillsammans med eleverna nyanserar läraren vilken del i veckan som räknas som skoldagar och lediga dagar, varvid felsvaret var ett utmärkt utgångsläge för att diskutera del och helhet. Sambandet mellan antalet skoldagar och lediga dagar i veckan synliggörs ytterligare genom att läraren använder fingertal och gester som markerar det hon pratar om. På detta sätt utvecklas resonemanget om talrelationer utifrån ett felaktigt elevsvar.

Sammanfattning

Vi har här fördjupat diskussionen om hur innehåll som behandlas i undervisningen kan ses som utvecklande. Med utgångspunkt i de observationer som kartläggningen består av kan vi se många goda exempel, men också var utvecklingspotentialen ligger. Detta ger en beskrivning av på vilket sätt elever genom att delta i förskoleklassens undervisning ges möjlighet att utveckla sin taluppfattning och sina räknefärdigheter. Det som framträder är att det spelar roll på vilket sätt innehållet behandlas i den kommunikativa verksamheten i klassrummet. Utvecklande undervisning karakteriseras av att läraren skapar möjligheter för eleverna att urskilja och pröva samband, att metoder för problemlösning lyfts till betraktelse och jämförelse, samt att elevinspel tas tillvara och görs till del i utforskandet av tals innebörder, egenskaper och användningsmöjligheter. I diskussionen kring empiriska exempel har vi försökt synliggöra vad som tycks göra skillnaden mellan enbart bekräftande och den mer eftersträvade utvecklande undervisningen.

Hur undervisningen iscensätts

Undervisning bygger på att lärare och elever delar gemensamt fokus på ett innehåll och att eleven engagerar sig i den aktivitet som läraren erbjuder. Det är därför inte oviktigt hur en aktivitet utformas, om den ska lyckas inspirera och engagera eleverna att undersöka och fördjupa sig i problemlösning och olika resonemang. För de yngsta eleverna är det särskilt viktigt att matematikinnehållet är meningsfullt och relevant sett ur deras perspektiv. I observationerna av undervisningen ser vi att lärarna är högst medvetna om detta och skapar inramningar som syftar till att göra undervisningen inte bara innehållsrik och meningsfull utan också lustfylld. Det är ett betydelsefullt mål i sig för att väcka elevers intresse för matematik, men också en utmaning att synliggöra nödvändigheten av matematik för eleverna. Det finns många aspekter av undervisningens iscensättande som spelar roll

för om eleverna lär sig det avsedda eller inte, men här begränsar vi oss till att studera hur matematikinnehållet i relation till relevans och meningsfullhet, samt ett kort nedslag i hur undervisningen organiseras.

Matematikinnehållets relevans och meningsfullhet

I styrdokumenten för förskoleklassens undervisning, samt också i den utredning som regeringen låtit göra om en möjlig tioårig grundskola[14], framhålls leken som en central del av förskoleklassens verksamhet. Motivet att lyfta fram leken kan främst ses i syftet att brygga över från den lekorienterade förskoleverksamheten till grundskolans kunskapskrav och mer formaliserad undervisning i lektioner. I forskningen betonas ofta lek som ett sätt att skapa meningsfulla sammanhang, där yngre barn kan känna igen och bearbeta erfarenheter samtidigt som läraren kan tillföra nya erfarenheter och perspektiv och på så sätt utmana barnets färdigheter och kunskaper. Men styrdokumenten, och till stor del också forskningen om lek och lärande, utvecklar inte hur lek och lärande kan iscensättas så att innehållet blir relevant, användbart och utvecklingsbart. I förskoleforskning om lek kan man se indikationer på att det är möjligt att som lärare delta i barns lek och tillföra nya perspektiv och utmana det barn redan kan och förmår så att leken de är involverade i blir rikare och utvecklas i nya riktningar[15]. I förskoleklassen förekommer visserligen denna friare lekverksamhet också[16] där eleverna ges möjlighet att ta initiativ och bestämma riktning i aktiviteten, men utbildningen har mer uttalade krav att också vara målorienterad, varför vilken riktning som helst inte är rimlig. En viktig fråga för förskoleklassens undervisningspraktik är därför hur matematikundervisningen kan göras relevant och meningsfull *för eleverna.*

Lekfull inramning

I många av våra observationer är atmosfären i klassrummet glad och lustfylld och det går att se att eleverna tycker det är roligt att delta. Men vårt syfte i projektet är att studera hur undervisningen gör det möjligt att utveckla kunnande i matematik och särskilt tals egenskaper och användning i problemlösning. Därför vill vi titta närmare på hur detta innehåll görs relevant och meningsfullt i förskoleklasserna. Vi kan då till exempel välja att prata om *lekfullhet* snarare än lek, eftersom lek ofta förknippas med särskilda aktiviteter, leksaker och rolltagande. Lekfullhet signalerar att det handlar om ett förhållningssätt, med hög grad av frihet för dem som deltar att bidra till hur aktiviteten utformar sig, vilka tillvägagångssätt man kan tänka sig att pröva, samtidigt som målet kan vara alldeles tydligt och klart; det kunnande vi strävar efter att eleverna ska utveckla. Lekfullhet innebär vidare en öppenhet för att lyssna till andras förslag och idéer och iver att spinna vidare på dem i nya riktningar. Lekfullhet för då med sig att tröskeln att pröva nya, lite vilda eller kreativa idéer inte är så hög, “vi prövar tillsammans och ser hur det går”.

I förskoleklasserna ser vi inslag av olika aktiviteter som har karaktären av “lek” och lekfullhet. En klassisk lekaktivitet, affärsleken, förekommer i några observationer. Affärslek har eleverna antagligen lekt i liknande form många gånger tidigare, inte minst i förskolan. I förskoleklassens undervisning syns dock en tydlig målorientering där läraren styr lekens mot att handla om tal och antal.

> Läraren har byggt upp en liten affär i klassrummet då hon har observerat att eleverna ofta i den fria leken visat intresse för att leka affär och pengars värde. Inledningsvis ber läraren en grupp om sju elever att berätta hur de brukar betala när de är med sina föräldrar och handlar. Eleverna är överens om att de vuxna oftast betalar med kort, men ibland har barnen riktiga pengar som de fått av tandfén eller av mormor. Läraren visar de olika mynten (enkrona, tvåkrona, femkrona och tiokrona) och eleverna får berätta vad de vet om mynten. Sedan lägger hon tvåkronan på mattan och bredvid den två enkronor, därunder lägger hon femkronan och bredvid den fem enkronor och

säger att det är lika mycket värt som fem enkronor. Då säger en elev ”Tre och två” och läraren säger ”Ja, du tänker en tvåkrona och tre enkronor, det går också bra”. Eleven nickar.

Läraren tar utgångspunkt i mynten som eleverna känner igen och har viss erfarenhet av och lyfter in det matematiska innehållet (uppdelning av tal) i den bekanta kontexten.

När även tiokronan har jämförts med tio enkronor riktar läraren elevernas fokus mot affären, en hylla med olika matförpackningar som är prismärkta (1–9 kr). Läraren ställer frågor om vad vissa varor kostar och vad de kan handla om de har fem kronor. Eleverna svarar på lärarens frågor men kan inte sitta still utan vill själva få handla i affären. Läraren organiserar handlandet. En elev i taget handlar och två sitter i kassan. Alla elever får inte samma summa att handla för, utan läraren bestämmer summan som var och en får.

Leken är en rollek där det är tydliga uppgifter för vad den som handlar ska göra med priser och pengar och den som sitter i kassan och tar emot betalning. Läraren släpper däremot inte leken helt fri utan deltar i leken genom att organisera så att det matematiska innehållet blir hanterbart och utmanande på en lämplig nivå för varje elev.

En bit in i affärsleken har en elev som har fem kronor plockat fram tre saker med prissättningen 2 kr, 2 kr och 1 kr, men vill handla ytterligare en vara som kostar 5 kr. Då säger läraren: ”Nu vill Kim handla även den här, räcker pengarna då?” En elev föreslår att varan för 5 kr ska ställas tillbaka i hyllan, en annan elev plockar tillbaka den och säger: ”Om man har en tiokrona kan man ju handla alla”. Läraren frågar hur hon tänkte då. Eleven svarar: ”Jag tänkte fem plus fem”. I slutet av affärsleken får en elev en 20-kronorssedel att handla för, vilket skapar resonemang bland eleverna om värdet på sedeln. En elev påpekar då att det är möjligt att betala med fyra femkronor i stället.

För att det matematiska innehållet i leken ska bli meningsfullt behöver lekdeltagarna vara överens om vilka regler som gäller och hur man ska tolka det som sker i leken. Till exempel som ovan där penningsumman eleven har att handla för är bestämd på förhand och elevens önskan inte går att fullfölja. För att leken ska fortgå och kännas meningsfull för alla deltagare behöver eleven med femkronan förstå varför han inte kan handla så som han ville. Den andra elevens inspel om att en tiokrona hade varit tillräckligt är en godtagbar förklaring men läraren är angelägen om att eleven förklarar hur hon tänker. Förklaringarna och motiveringarna, som har matematisk grund, är därför ett betydelsefullt innehåll i affärsleken som gör leken till en form av undervisning.

För att skapa relevans och meningsfullhet för eleverna har läraren vid detta undervisningstillfälle tagit utgångspunkt i den lek som eleverna spontant brukar ägna sig åt. Läraren har på förhand planerat vad som ska vara i fokus i undervisningen och vilka ramar som finns. Affärslekens upplägg och de samtal som förs utgår från elevernas erfarenheter och intressen. Elevernas delaktighet upplevs som hög, alla barn får handla och sitta i kassan och deltar på så vis i problemlösningen. Under hela undervisnings-tillfället är läraren uppmärksam och plockar upp eleverna resonemang och lyfter fram alternativa lösningar som görs publika för eleverna. Läraren har på förhand bestämt att eleverna ska tilldelas olika summor att handla för (individanpassning) vilket gör att alla elever får en lämplig utmaning när de ska handla varor i affären.

I syfte att engagera eleverna i en aktivitet, kan vi i observationerna se att lärare ibland formar aktiviteter som är lekfulla och inbjudande för eleverna i form av en berättelse eller en uppgift som ramas in av något bekant, lite spännande och lustfyllt.

Läraren berättar om en katt som vill skoja lite med sin kompis. Katten vill gömma ägg i kompisens stövlar. Läraren placerar två stövlar framför eleverna och tar fram fem tennisbollar som får symbolisera ägg. Läraren berättar för barnen att katten behöver deras hjälp för att undersöka på hur många olika sätt äggen kan läggas i stövlarna. Eleverna tar sig an uppgiften och läraren fångar

upp elevernas svar och dokumenterar dessa som triader av tre tal på små tavlor (helheten 5 överst och uppdelningen i till exempel 3 och 2 nedanför). Till sist så är läraren och eleverna eniga om att de hittat alla tänkbara kombinationer för hur de fem äggen kan delas upp mellan stövlarna.

Vinsten med inramningen i denna aktivitet är att eleverna engageras. Förlusten är att matematik-innehållet blir ett parallellspår, det går att delta i det lustfyllda utan att engagera sig i matematiken. Det kan mycket väl kännas relevant och meningsfullt för eleverna att hitta på skojigheter med katten, men matematiken blir inte nödvändig för att lösa uppgiften, det går att lösa uppgiften genom försök och misstag tills någon konstaterar att man kom på ett nytt sätt att dela upp äggen. Däremot gör läraren i exemplet ovan en ansats att visa på den systematik som man kan tillämpa för att komma på alla sätt det går att dela upp äggen mellan stövlarna. Att försöka minnas alla kombinationer, både de som hittats och de som kan finnas kvar att pröva är snudd på en omöjlig uppgift, om man inte redan har ett system för att komma ihåg. Läraren försöker visa på systematik genom att notera de tre tal som hela tiden laboreras med i uppgiften, 5 och de två delar som femman delas upp i: 5 och 0, 4 och 1, 3 och 2. Ur ett matematiskt perspektiv synliggör systematiken vilka möjliga uppdelningar som kan göras, alltså relationer mellan delar inom talet fem. Ur ett didaktiskt perspektiv är det däremot inte självklart vad matematiken har att göra med den aktivitet och uppgift eleverna engageras i. *Uppgiften* kan upplevas som relevant och meningsfull för eleverna, men frågan är hur *matematiken* kan göras relevant och meningsfull.

Kan man leka med matematiken och ändå göra den relevant och meningsfull för eleverna? Vi kan se tillbaka på en av de undervisningsepisoder som beskrivits tidigare under rubriken *Att visa på matematiska samband* där läraren använder en sexsidig tärning för att få eleverna att upptäcka del-helhets-relationer för talet 7. Tärningen kastas flera gånger och eleverna talar om antalet prickar som tärningen visar och läraren avslöjar antalet på motstående sida för eleverna varje gång. Eleverna verkar imponerade över lärarens förmåga att “se” det andra antalet: "Wow, hur kunde du veta det?". Denna tärningsuppgift är inte inramad eller relaterad till elevernas erfarenheter på något sätt, men läraren bygger upp en spänning i situationen som engagerar eleverna. Hur kan det egentligen komma sig att läraren kan veta antalet prickar på den motsatta sidan på tärningen? Läraren leder aktiviteten mot att eleverna ska få upptäcka talrelationerna och synliggör detta genom att så småningom rita upp de olika talkombinationerna på tavlan och få eleverna att uppmärksamma summan av prickarna på de två motstående sidorna på tärningen. Det matematiska innehållet i aktiviteten utgör uppgiften och står också i centrum för elevernas uppmärksamhet genom hela aktiviteten – matematiken är relevant och meningsfull i detta sammanhang.

Genom att ställa frågor som “Hur ska vi göra?” och “Hur kan man veta?” i undervisningen skapas situationer som öppnar upp för frågor och förslag från eleverna. Men frågorna kan inte alltid komma från eleverna, det de inte “ser” kan de inte heller fråga eller ge förslag kring. I en klass vi besökt var temat för lektionen “Tappade tänder”. Man håller räkning i klassen på hur många tänder eleverna har tappat och utgår från att eleverna brukar tappa tio tänder fram tills de börjar i första klass. De två lärarna i klassen ber först eleverna ta tio klossar (röda och vita) från en stor hög på golvet. Eleverna tar sen bort så många klossar som antalet tänder de tappat, därefter börjar man jämföra med andra och ordnar i lika många-grupper och i antalsordning, skapar tio-staplar för att det ska bli lättare att ”se” och jämföra tidigare antal tappade tänder med dagsaktuellt antal (skillnad). Matematikinnehållet har en klar koppling till den tematiska inramningen med tappade tänder och för eleverna är det knutet till deras livsvärld och viktiga händelser som de alla har erfarenhet av. Att fundera över antal tappade tänder och antal ännu inte tappade tänder har relevans för eleverna och i exemplet som följer gör lärarna ännu mer av det matematiska innehållet genom att sätta blickpunkten på “hur kan man veta” och att undersöka antal.

Lärare L häller ut en stor hög med klossar på golvet: Ni får tio tänder var. Så tar alla tio var. Hur gör man smartast? Tar en hög eller plocka direkt? Så det skulle bli enklare att se hur många det var?
Elev: En rad.
Lärare G: Eller två rader. Om man har tio kan man ha i hög eller i en rad eller två rader.
Elev: Två färger.
Lärare L: Hur många har du i varje? (Eleven räknar fyra röda och sex vita. Alla elever räknar sina klossar).
Lärare L: Sätt ihop till en lång rad.
Lärarna säger till varandra: Vi gör var sin tia.
Lärare G räknar sin stapel till åtta: Nej, det räcker inte (fortsätter ta klossar och räknar klossar i stapeln. Lärarna jämför sina staplar [11 och 9]) En är längre.
Lärare L: Jag vill ha längre.
Elev: Du har elva!
Lärare L: Hur vet ni det?
Elev: Ta bort en.
Lärare G ger en av sina klossar till Lärare L: Lotta får en av mig.
Lärarna håller de lika långa staplarna intill varandra.
Lärare G: Ska vi ta hälften var, hälften av tio, vad är det?
Lärare G bryter itu sin och Lärare Ls staplar, de byter halvor med varandra och har nu var sin stapel med 5 röda och 5 vita klossar. Båda lärarna går sedan runt och mäter sina tio-staplar med elevernas så att alla har tio: Det fattas en. Hur många ska du ta bort? Stämmer det nu, snyggt! Men titta, den var för kort, vad får vi göra då? Färgerna spelar ingen roll, det viktigaste att man har tio enheter sådana här kuber.

Sättet att föra resonemanget om antal framåt tar avstamp i ett undersökande förhållningssätt, lärarna ställer frågor som pekar ut problem som inte alltid har en självklar lösning. Detta märks redan i det inledande momentet när lärarna undrar på vilka sätt man kan samla exakt tio klossar, att det kan finnas flera sätt men något kanske är smartare än andra? Här finns en nyfikenhet "ska vi göra si eller så?" "hur gör vi då?" och "hur vet ni det?" som inte bara bjuder in till att delta i samtalet utan också till att våga pröva och föreslå lösningar som lärarna sedan genomför och reflekterar över så att alla elever får ta del av förslagen. Det lekfulla prövandet och öppenheten i att lärarna inte tycks ha en färdig lösning är exempel på den lekfullhet som kan stötta elever att våga pröva sina idéer och ta initiativ där utfallet är oklart. Trots öppenheten har lärarna i exemplet en mycket väl genomtänkt idé om vart de vill nå, men är öppna för att ta vara på elevernas inspel och på så sätt engagera dem i undersökningen av talen som tio-enheter.

Matematiken reducerar bruset

Världen är full av "brus" och det kan vara svårt att sortera ut vad som spelar roll och vad som är irrelevant i en situation. Matematik blir här det redskap som strukturerar informationen så den blir överskådlig och så att samband kan studeras närmare. Men vad som är relevant information och hur informationen kan sorteras upp är färdigheter som elever behöver stöttning i att utveckla. Detta är ett krävande tankearbete som gör att elevens känsla för mening och relevans behöver säkras, för att hon eller han ska känna att det är värt att engagera sig i den krävande uppgiften. Det behöver finnas ett behov att sortera och få överblick över en mängd information. Tillfällen när vi observerat att detta görs är när utgångspunkten tas i elevernas egna erfarenheter och upplevelser av ett problem. Det vill säga något problem som angår dem och där matematiserandet[17] blir *nödvändigt*, sett ur elevernas perspektiv.

I en klass undersöker läraren och eleverna gemensamt vilket mellanmål de har tagit med till förmiddagens mellanmålsstund. Läraren säger: "Låt oss försöka ta reda på vilken frukt som är den vanligaste idag!". Läraren ritar en horisontell axel på tavlan och frågar barnen vilken frukt eller annat mellanmål de har med sig i sina mellanmålslådor idag. Läraren skriver ner elevernas svar under axeln på tavlan och ritar också en bild till varje svar. Sedan frågar läraren systematiskt hur många av barnen som har en specifik frukt eller annat mellanmål med sig idag, till exempel "Hur många av er har äpplen med er idag?". De barn som har det specifika mellanmålet räcker upp handen. Läraren dokumenterar varje elevsvar med ett kryss i det stapeldiagram som nu sakta tar form på tavlan. Läraren använder sedan stapeldiagrammet och ställer olika frågor till barnen och hjälper dem att svara genom att tolka data i diagrammet, såsom vilken frukt som var vanligast idag. Läraren visar på hur en undersökning kan genomföras och hur en stor mängd information systematiskt kan dokumenteras för att sedan användas för att besvara olika frågeställningar.

På liknande sätt tar lärarna utgångspunkt i aktiviteter som eleverna finner lustfyllda, såsom spel och lekar med tävlingsmoment, där det kan behövas verktyg för att hålla ordning och reda på spelarnas turer och poäng. Det blir nödvändigt att strukturera spelet och dess utfall så att det blir begripligt och överskådligt för deltagarna. Tabeller är ett vanligt inslag när man håller ordning på poäng. I vissa fall förtydligas utfallet av spelet med andra illustrationer som i bowling-exemplet tidigare, där sambandet mellan fällda käglor och kvarstående tydliggörs. Det blir då inte bara en poängsumma som dokumenteras utan en förklaring till poängen, var de kommer ifrån.

Matematik förknippas ofta med problemlösning och vi kan se många exempel på uppgifter där eleverna uppmanas tänka ut hur de kan komma fram till en rimlig lösning. Problemlösning sägs ofta användas för att det sätter matematikinnehållet i en kontext, som ska göra uppgiften mer elevnära och i bästa fall upplevas som att matematiken blir nödvändig. Men det kan vara svårt att formulera problem som är “på riktigt” meningsfulla, som eleverna känner igen och kan relatera till. I verkliga vardagsproblem finns ofta inslag som är irrelevanta ur ett matematiskt perspektiv, men som kan vara mycket angelägna att ta hänsyn till för eleverna inom ramarna för deras erfarenhetsvärld. Ett exempel kan vara att tre barn ska dela på fyra russinkakor men ett av barnen tycker inte om russin så de andra två barnen får dela på kakorna istället. Det kan också finnas realiteter i vardagsproblem som gör att problemet inte är rimligt att lösa på ett exakt sätt, sett ur ett matematiskt perspektiv, såsom att dela kakor men kakorna är aldrig exakt lika stora när man bakar dem hemma och hur ska man då dela så det blir rättvist? Problem tagna ur vardagen kan alltså innehålla mycket “brus” som kan ta uppmärksamheten från det matematikinnehåll som är det egentliga fokuset för undervisningen. Styrkan i matematik är att man genom “matematikfiltret” lyfter resonemanget från det konkreta och de personliga upplevelserna till en generaliserad nivå där bruset reduceras och strukturer skapas som hjälper eleven att “se” samband i problemet och därmed hur problemet kan lösas.

I följande observation bygger läraren först upp ett narrativ, en berättelse, som väcker engagemang, men som också innehåller det matematiska problem som hon vill att eleverna ska ägna sig åt. I narrativet som eleverna känner igen och relaterar till personliga erfarenheter behövs en reducering för att rikta fokus mot matematikinnehållet talrelationer.

> En tidig novembermorgon sitter tolv förväntansfulla elever i en ring på golvet och väntar på sin lärare. Läraren kommer insmygande iklädd hatt och slängkappa och berättar med inlevelse om den bussfärd hon gjort på morgonen. Läraren visar med hela kroppen hur ledsen hon är över det hon sett från bussfönstret. Hon har uppmärksammat djur längs bussturen, ett antal djur i en hage, men att hon inte kunde se deras ben. Hon säger: ”Det såg ut som om djuren hade tappat benen”. Berättelsen är spännande varför barnen har fullt fokus på läraren och berättelsen. Läraren tar upp en gul ask ur fickan och frågar barnen om de vågar titta i asken. En elev fnissar till och säger: ”Vi vågar, vi är stora barn nu”. Läraren går runt i ringen och låter eleverna en efter en kika in i asken.

> Läraren frågar om eleverna kan hjälpa henne att lösa problemet, alltså vilka djur som kan ha funnits i hagen? Flera elever svarar direkt att de kan hjälpa henne med det. Därefter ger eleverna förslag på vilka djur hon kan ha sett i hagen och de resonerar tillsammans om hur många ben respektive djur har. Eleverna delas in i grupper om två och tilldelas ett stort papper, pennor och en ask med stickor. De sätter sig vid olika bord i rummet. Eleverna uppmanas att dokumentera sina lösningar.

Uppgiften är klurig, det märks, men alla elever sätter i gång direkt. Några elever börjar, efter att ha räknat upp antalet stickor, rita djur och ben på sitt papper. En grupp elever räknar antalet stickor flera gånger och kommer fram till olika resultat varje gång. Läraren observerar deras försök, hjälper dem genom att systematisera och lägga stickorna på en rad på bordet och räknar tillsammans med dem. Sedan frågar hon dem vilka djur de väljer. Direkt svarar de rådjur och älg för de har minsann sett både rådjur och älg i verkligheten. Tillsammans lägger de fyra stickor i två högar och läraren ber dem nu fundera vidare på hur många djur det räcker till och går sen vidare.

Läraren cirkulerar bland borden och sitter ner vid respektive grupp och ber eleverna resonera om sina lösningar. Eleverna dokumenterar på lite olika sätt. Några ritar djuren mer i detalj medan andra ritar antal ben som streck i cirklar. I vissa grupper uppmanar läraren eleverna att lägga benen i högar så att de kan se uppdelningarna. I samtal med eleverna lyfts frågor som: ”Hur många ben har ni?”, ” Hur många har ni använt?”, där stickorna hjälper till att fokusera talrelationerna mellan helheten och delarna. ”Kan vi tänka på något annat sätt?” ”Är det tomt i asken? Är alla benen använda?” öppnar å andra sidan upp för att tänka i andra banor, att se problemet ur olika synvinklar för att på så sätt kunna värdera olika lösningar och metoder. Eftersom uppgiften går ut på att lista ut det eleverna inte kan se framför sig, är det nödvändigt att använda artefakter eller notationer för att strukturera uppgiften och finna lämpliga lösningar. Dokumentationen är också viktig här, eftersom det kan finnas många olika sätt att lösa uppgiften och dessa behöver eleverna samtidigt kunna se och jämföra för att utveckla förståelse för talrelationer (ett tal kan förstås som sammansatt av olika talkombinationer) och vilka metoder som är användbara.

En annan grupp kommer utan lärarens hjälp fram till att de hade ritat för många djur på sitt papper. De har ritat en spindel, en myra, en fågel och två fyrfota djur. Läraren låter dem berätta om djuren de ritat och vill att de ska lista ut hur många djur som benen räcker till. De lägger stickorna på djurens ben och ser då att de 16 benen räcker till spindeln, myran och fågeln. Läraren frågar dem sedan hur många ben som det skulle ha legat i asken från början om alla deras ritade djur hade haft ben.

Uppgiften som eleverna presenteras för är öppen, det vill säga det finns möjlighet för eleverna att hitta olika lösningar där de själva kan bestämma vilka djur som de vill rita, samtidigt som det finns en tydlig riktning i uppgiften att det är ett bestämt antal ben (stickor) som ska användas för att lista ut vilka djur det kan ha varit i hagen tidigare under morgonen. Djuren i sig, om det är älgar eller rådjur, kan bli ett “brus” som stör fokuseringen på det matematiska innehållet. Stickorna som eleverna använder för att pröva sig fram till olika lösningar hjälper till att reducera bruset och matematiken kan framträda och bli innehåll för lärande. Samtidigt kan vi se att den lekfulla inramningen som läraren iscensätter bidrar till att rikta fokus och skapa en relevansstruktur för den matematiska uppgiften, vilket bidrar till att eleverna deltar med stort engagemang.

Undervisningens organisation

Undervisningens främsta mål är inte att förmedla information utan att främja elevers lärande. Hur undervisningen organiseras skapar olika möjligheter till lärande och formar elevernas syn på vad matematik är. Det är viktigt att eleven inte lämnas ensam i sitt lärande utan att förutsättningar skapas för att delta i undervisning som är organiserad så att den främjar delaktighet och samarbete med andra.

I grundskolans läroplan skrivs kommunikationsförmågan fram som en av fem förmågor i matematik som elever ska ges möjlighet att utveckla. För att möjliggöra detta behöver alla elever få ta del av undervisning där de ges utrymme att samtala och diskutera tankar, idéer och lösningar. Dessvärre har många elever (även de yngsta) en föreställning om att matematik handlar om enskilt arbete i matematikboken och att den som är snabb på att lösa problem är den som är duktig i matematik. För att komma ifrån detta behöver eleverna få ta del av undervisning som uppmuntrar till samarbete och där kommunikationen är ett självklart inslag.

I kartläggningen har vi uppmärksammat att en stor del av undervisningstiden ägnas åt egenarbete. Det vill säga, läraren introducerar det matematiska innehåll och den aktivitet som eleverna ska arbeta med och efter en gemensam undersökning eller presentation av läraren sätter sig eleverna själva eller i par för att göra samma uppgift som nyss presenterats i en bok eller på ett papper med uppgifter. Vår tolkning är att målet med egenarbetet är att eleverna tränar på färdigheter i matematik, det vill säga något de redan kan och behöver befästa, eftersom eleverna när de är klara med egenarbetet antingen får en ny uppgift eller går ut från klassrummet på rast. Ett alternativ, som vi sett endast ett fåtal exempel på i kartläggningen (se "äppeldelningen" och "vilka djur kan tillsammans ha 16 ben?" som beskrivits tidigare), är att eleverna till exempel parvis ägnar sig åt gemensam problemlösning där nya metoder utvecklas och prövas (det vill säga inte enbart reproduceras), som läraren sedan lyfter upp till betraktelse för alla elever och synliggör hur metoderna fungerar för den aktuella problemlösningen, som en summering och utveckling av det eleverna själva föreslår.

Den röda tråden - från uppstart, via elevarbete till summering

I diskussioner om undervisning pratas det ofta om vikten av variation, att undervisningen behöver varieras för att hålla eleverna uppmärksamma och intresserade. Det finns dock en risk i att variera för varierandets skull. Variation kan tolkas som sätt att generalisera ett kunskapsinnehåll, alltså där man behandlar samma matematiska idé i olika form, med olika material och representationer. Den didaktiskt viktiga frågan är då: ser eleverna kopplingen mellan de olika formerna, materialen och representationerna? Om det inte är givet att eleverna gör det, hur kan då läraren skapa tillfällen för att synliggöra denna koppling? Det matematiska innehållet behöver till en början hållas konstant, medan uttrycksformerna varieras, men det är också av betydelse att läraren uttryckligen knyter ihop den variation som introducerades för eleverna. Till exempel arbetar en lärare under ett längre undervisningspass med samma innehåll "dela upp fem" i tre moment som vardera innehåller ett flertal representationsformer (plastfigurer, teckningar och skriftliga symboler), men kopplingen görs av läraren både inom och mellan momenten för att slutligen ringa in det matematiska innehållet på ett systematiskt sätt för att summera (se bild 26).

Observationerna visar att lärarna ofta börjar med en gemensam uppstart som presenterar för eleverna vad innehållet i undervisningen för dagen är. Sen följer någon form av bearbetning av detta innehåll, antingen i helgrupp, mindre grupper eller enskilt. Däremot är det mer sällan vi ser att läraren summerar och samlar ihop vad eleverna bearbetat. Vi ser att när det görs, som i exemplet ovan, får undervisningen en mycket tydligare struktur och bearbetningen av innehållet blir synliggjort för eleverna – vad var poängen med det vi precis har gjort? Ett sådant metaperspektiv på sitt eget lärande och på den undervisning som eleven varit delaktig i, bör kunna bidra till att matematikundervisningen sett ur barnets perspektiv inte stannar vid att man gör olika uppgifter och skriver ner saker i sitt häfte, utan att det handlar om att lära sig förstå och använda matematiken i olika sammanhang.

Bild 26. Samma innehåll behandlas i olika moment och knyts ihop i undervisningen.

Diskussion och rekommendationer

Kartläggningen av matematikundervisning i förskoleklass har gjort det möjligt att fånga upp goda undervisningsexempel, men också att identifiera var utmaningarna ligger i undervisningen om tal, tals egenskaper och användning i problemlösning. Vi menar att resultatet från kartläggningen kan användas både som inspiration och som utgångspunkt för att vidareutveckla matematikundervisning och för att få syn på utvecklingsområden i den egna verksamheten.

De flesta barn utvecklar en grundläggande förståelse för tal under sina första levnadsår och börjar förskoleklassen med färdigheter att lösa enkla räkneuppgifter som “du har två stenar och din kompis tre stenar, hur många har ni tillsammans?”. Men det finns också förskoleklasselever vars förståelse för tal är mycket begränsad och där tal, räkneord, siffror och andra matematiska symboler är ett främmande språk. Skillnaderna i erfarenheter och kunnande kan därför vara stora i en och samma klass. Så ser det också ut i de förskoleklasser som vi besökt. Vi ser också att det är relevanta innehåll som behandlas i undervisningen, där samma matematik presenteras med varierande komplexitet. Det ligger dock en utmaning i att få eleverna att undersöka och upptäcka nya egenskaper hos tal och även att använda dem i meningsfulla sammanhang. En god taluppfattning, det vill säga kunskaper om tals innebörd och struktur är en förutsättning för att talrelationer och aritmetiska operationer ska kunna hanteras i problemlösning. Samma aktivitet, till exempel om talstrukturer, kan vidgas och fördjupas beroende på elevernas individuella förutsättningar. Med andra ord så kan ett undersökande av talkombinationer med stöd av klossar som grupperas på olika sätt, utvecklas i riktning mot talbaser och positionssystemet när man skapar och systematiskt hanterar större enheter, såsom i tiostaplar.

I undervisningssammanhang brukar man ofta prata om att elever behöver utmaningar, de behöver få möta problem och uppgifter som får dem att tänka till och avancera i sina sätt att hantera och lösa uppgifter. För läraren innebär detta att kunna ta elevens perspektiv och sätta sig in i på vilket sätt eleven förstår en uppgift, hur tal och räkneprinciper förstås och hur dessa används av eleven. Det är

alltså en balansgång att ta avstamp i vad eleven kan och förstår och att erbjuda erfarenheter och utmaningar som öppnar upp för att eleven ser uppgiften på ett nytt sätt och därefter kan lösa uppgiften mer effektivt och framgångsrikt. Alltför svåra uppgifter gör att eleven inte har en aning om hur han eller hon ska ta sig an uppgiften och kanske ger upp direkt, medan uppgifter som eleven redan kan lösa rutinmässigt inte ger någon utmaning som utvecklar kunnandet. Forskning har visat att yngre elever ofta möter matematikuppgifter som de redan kan lösa utan större ansträngning och undervisningen begränsas till att bekräfta det som eleverna redan kan[18], vilket vi också ser i vår kartläggning. Tyvärr leder det i sin tur lätt till att matematiken kan upplevas som tråkig av eleverna då de inte får möta utmaningar på en lagom och utvecklande nivå.

I en tidigare kartläggning bland lärare i förskola och förskoleklass[19] ett par år efter att målen för matematik i förskola och förskoleklass förstärktes i Sverige, visade det sig att svenska lärare överlag är bra på att uppmärksamma och bekräfta barns frågor och initiativ. Det är sannolikt en följd av den social-pedagogiska traditionen i svensk förskola som uppmuntrar till kommunikation, samtal och att ta barns intressen och initiativ som startpunkt för att erbjuda stimulerande erfarenheter. Barnens upplevelser och erfarenheter står i förgrund. Men det kan också vara en bidragande orsak till att lärare mer sällan tar initiativ till att utveckla barnens resonemang genom att peka på nya samband och principer i undersökande aktiviteter tillsammans med barnen. Vi ser samma tendenser i den aktuella kartläggningen i förskoleklasserna, att eleverna bekräftas och uppmuntras att interagera i klassrummet, men att det innehåll som interaktionen kretsar kring inte tillräckligt ofta drivs av matematiska undersökningar eller fördjupande resonemang.

För att ge varje elev bästa tänkbara förutsättningar att utveckla sina matematikfärdigheter är en central del i undervisningen att erbjuda eleverna metoder att använda när de möter matematikuppgifter och problemlösning, som hjälper dem att se uppgiften eller problemet som möjligt att lösa. Det räcker då inte att eleven gör likadana uppgifter många gånger, det måste till ett nytt sätt att se uppgiften ifråga. Detta är lärarens uppgift att bidra med, både när det gäller det som kan tyckas enkel problemlösning och mer avancerad. I kartläggningen kan vi se att denna del i matematikundervisningen tycks svår att tillämpa, det vill säga att stanna upp och undersöka på vilket sätt man kan lösa en uppgift, om det finns flera sätt och vilket sätt som i så fall är mest lämpligt för att lösa den aktuella uppgiften. För många elever i den här åldersgruppen är det inte lätt att förklara hur man kommer fram till en lösning, men att få presenterat för sig flera olika sätt och tillfälle att jämföra dem, kan bidra till att eleven utvecklar en djupare förståelse för *att* det finns olika metoder. Därför är det viktigt att läraren vågar stanna upp och peka ut likheter och skillnader, samt värdera (tillsammans med eleverna) vilken eller vilka metoder som leder till en funktionell lösning på problemet.

För att eleverna ska utvidga och fördjupa sitt lärande behöver de ges möjligheter att koppla samman nya kunskaper med kunnande som de redan har och skapa samband mellan flera olika representationer av tal, begrepp och matematiska idéer. För att eleverna ska bli förtrogna med matematiska representationer av tal behöver de ges rika tillfällen att bekanta sig med dessa, se dem, känna dem, prata om dem och använda dem i olika sammanhang. Det är viktigt att elever inte enbart möter tal och räkneord i läromedel utan att läraren riktar uppmärksamhet mot vad talen faktiskt betyder, vad de har för egenskaper och vilka principer vi använder när vi räknar och löser meningsfulla matematiska problem. Likaså behöver matematiken synliggöras som ett redskap i problemlösning som underlättar tänkandet, det vill säga, som reducerar bruset så att det matematiska innehållet kan hanteras på framgångsrika sätt. I våra observationer har vi sett många olika sätt att rama in innehållet för undervisningen så att det ska bli igenkännbart och inspirerande för eleverna, det vill säga relevant och meningsfullt. I den matematikdidaktiska forskningen framhålls detta som en nyckel till kunnande som är hållbart och utvecklingsbart, det vill säga inte bara inlärda fakta utan förståelse för hur matematik bidrar till att lösa problem och göra omvärlden lite mer begriplig.

Rekommendationer

Mot bakgrund av den kartläggning som här presenterats och diskuterats på vetenskaplig grund, ger vi följande rekommendationer för vidare utveckling av matematikundervisningen om tal i förskoleklass:

- Bekräfta elevers förslag och svar, men problematisera förslagen genom frågor som “hur kan man veta det?” så att processen och valet av metod görs till en central del av matematiken.
- Låt innehållet som interaktionen i lärandesituationen kretsar kring drivas av matematiska undersökningar och fördjupande resonemang där matematiken görs relevant och meningsfull för eleverna även om lek och nyfikenhet ska prägla aktiviteterna.
- Välj artefakter och notationer med omsorg, så att de tillsammans med lärarens ord och förtydligande gester visar på relationer inom och mellan tal.
- Låt exempel finnas kvar synliga för eleverna, så att exemplen kan jämföras och möjliga samband upptäckas och förklaras.
- Stanna upp och undersök på vilket sätt man kan lösa en uppgift, om det finns flera sätt och vilket sätt som i så fall är mest lämpligt för att lösa den uppgiften och andra uppgifter.
- Ta vara på elevers felsvar och se dem som underlag för att undersöka på vilket sätt en uppgift kan tolkas och förstås ur olika perspektiv. Detta främjar en undersökande atmosfär och att det är tillåtet att svara fel och att komma med kreativa lösningar på problem.

Referenser

[1] Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan samt för förskoleklassen och fritidshemmet. Lgr11*. Reviderad 2019. SKOLFS 2010:37. Regeringen.

[2] Skolverket (2019). https://www.skolverket.se/undervisning/forskoleklassen/kartlaggning-i-forskoleklassen#h-Hittamatematiken

[3] SOU (2016). *På goda grunder – en åtgärdsgaranti för läsning, skrivning och matematik*. Betänkande. SOU 2016:59

[4] Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills*. Acta Universitatis Gothoburgensis.

[5] Ekdahl, A.-L. (2019). *Teaching for the learning of additive part-whole relations: The power of variation and connections*. (Diss.). Jönköping University.

[6] Kullberg, A., Björklund, C., Brkovic, I., & Runesson Kempe, U. (2020). Effects of learning addition and subtraction in preschool by making the first ten numbers and their relations visible with finger patterns. *Educational Studies in Mathematics, 103*(2), 157-172. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09927-1

[7] Wynn, K. (1991). Children's early counting: Saying the number word sequence, counting objects, and understanding cardinality. In K. Durkin & B. Shire (Eds.), *Language and mathematical education* (pp. 27-39). Open University Press.

[8] Sarnecka, B., Kamenskaya, V. G., Yamana, Y., Ogura, T., & Yudovina, J. B. (2007). From grammatical number to exact numbers: Early meanings of 'one', 'two', and 'three' in English, Russian, and Japanese. *Cognitive Psychology, 55*, 136–168.

[9] Kullberg, A., & Björklund, C. (2020). Preschoolers' different ways of structuring part-part-whole relations with finger patterns when solving an arithmetic task. *ZDM Mathematics Education, 52*(4), 767–778. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01119-8

[10] Venkat, H. & Askew, M. (2018). Mediating primary mathematics: Theory, concepts, and a framework for studying practice. *Educational Studies in Mathematics, 97*, 71–92.

[11] Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–140.

[12] Verschaffel, L., Torbeyns, J., & Dooren, W. V. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Education, 24*(3), 335–359.

[13] Ellemor-Collins, D., & Wright, R. B. (2009). Structuring numbers 1 to 20: Developing facile addition and subtraction. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 50–75. https://doi.org/10.1007/BF03217545

[14] SOU (2021). *En tioårig grundskola – Införandet av en ny årskurs 1 i grundskolan, grundsärskolan, specialskolan och sameskolan*. SOU 2021:33.

[15] Pramling, N., Wallerstedt, C., Lagerlöf, P., Björklund, C., Kultti, A., Palmér, H., (…) Pramling Samuelsson, I. (2019). *Play-responsive teaching in early childhood education*. Springer.

[16] Skolinspektionen (2015). *Undervisning i förskoleklass – "När vi har jobbat får vi leka"*. Rapport 2015:03.

[17] Freudenthal, H. (1981). Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in mathematics, 12*(2), 133–150.

[18] Claessens, A., Engel, M. & Curran, F. C. (2014). Academic content, student learning, and the persistence of preschool effects. *American Educational Research Journal, 51*(2), 403–434.

[19] Björklund, C. & Barendregt, W. (2016). Teachers' mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research, 60*(3), 359–377. https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1066426